Contenido

Presentación

Capítulo I

Un viaje por las lagunas de la enseñanza de las matemáticas

Enseñanza y aprendizaje

Reflexiones generales sobre la enseñanza de las matemáticas y su papel

Capitulo II

Las matemáticas en un día cualquiera

En el desayuno

La leche y sus envases

En el escaparate de una joyería

De paso por la papelería

Codificación e identificación

Sumergidos en las denominadas "Unidades de medida"

¿Hollywood nos engaña? Distorsiones entre la ficción y la realidad

Capitulo III

El número de oro: arte y naturaleza

El rectángulo áureo

Presentación

Construcción gráfica de un rectángulo áureo

El rectángulo áureo en el arte

El rectángulo áureo en la actualidad

Obtención y caracterizaciones

El número de oro en la historia

La razón áurea

La razón áurea y la fisiología humana: las proporciones áureas en el cuerpo humano

La razón áurea y la visión

La aportación de Fibonacci

Introducción

La serie de Fibonacci

Los conejos y Fibonacci

La serie de Fibonacci y el número de oro en la naturaleza

Capitulo IV

Matemáticas y sociedad: algunas notas y consideraciones

Las matemáticas, un hecho social

Innovación y nuevas tecnologías

Recomendaciones para la mejora de la calidad docente: La herencia de Puig Adam

Epílogo

Una propuesta metodológica

Bibliografía

"El arte de seducir matemáticamente"

"*¿Qué se puede hacer para que una materia como las matemáticas sea significativa y provechosa para los ciudadanos?* "

Claudi Alsina, 1999

Dedicatoria:

"*Es desestable esa avaricia espiritual que tienen los que, sabiendo algo, no procuran la transmisión de esos conocimientos*"

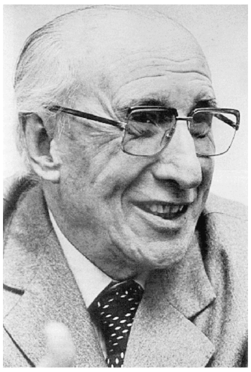
Miguel de Unamuno

Al Dr. Claudi Alsina, Catedrático de matemáticas y maestro, cuyo contacto humano vivo y candente abre los corazones a la esperanza y al amor por la enseñanza y el aprendizaje, transmitiendo entusiasmo a sus interlocutores y alumnos.

Així ha vist en Cesc la nostra feina

Preámbulo

Al finalizar la redacción del libro no he podido evitar recuerdos y experiencias agradables proporcionadas por el Dr. Lluís Santaló. Fallecido hace dieciocho años. Su influencia en la educación, y en particular su vinculación a Catalunya y a América Latina, ha dejado una huella imborrable en el noble oficio de educar.



Lluís Santaló (1911-2001), eminente matemático y pedagogo, fue pionero en renovación pedagógica de la enseñanza de las ciencias, en particular de las matemáticas. En el año 1939, se exilió a Latinoamérica, lugar en que ejerció y desarrollo sus ideas y metodologías. En 1977 fue investido Doctor Honoris Causa por la Universidad Politécnica de Catalunya, en su discurso de investidura manifestó su concepción de las matemáticas como: "*La matemática es simultáneamente arte, ciencia y técnica. Como arte, nos ayuda a discernir las formas y a apreciar la naturaleza como caudal de belleza y armonía; como ciencia, nos ayuda a conocer la naturaleza y a entender sus leyes; y como técnica, contribuye a dominar la naturaleza y sus fuerzas, para ponerlas al servicio de los ciudadanos*".

Como matemático y educador, espero que esta breve reseña sirva de referencia a todos los que amamos las matemáticas y su educación.

Presentación

Para el lector: una invitación a la reflexión

Pocas personas, al leer el título de este trabajo, no habrán sido capaces de reprimir un pensamiento de aburrimiento. Las matemáticas son un tema que no acostumbra a levantar pasiones. Siempre se las ve como algo tan tedioso como algo inútil. Un ejemplo ilustrativo de esto nos lo da Raymond Smullyan, matemático estadounidense autor de diversas obras divulgativas, que en el prólogo de su libro "La dama o el tigre" en el que habla de acertijos y problemas matemáticos nos cuenta cómo, al ir a hablar con un niño que estaba leyendo uno de los libros publicados, el padre, antiguo compañero de estudios le advirtió: "*Está leyendo tu libro y le encanta. Pero cuando hables con él, no le digas que lo que está haciendo son matemáticas, ¡Porque odia las matemáticas! Si tuviese idea de que en realidad esto son matemáticas, dejaría de leer el libro inmediatamente*."

A mucha gente le pasa lo mismo. Relacionan las matemáticas con interminables horas delante de una pizarra llena de fórmulas, números y expresiones casi demoníacas, algo que puede decirse que traumatiza a muchas personas.

Intuitivamente parece evidente que, socialmente, nuestra materia no está bien considerada.

Cuando respondemos a la pregunta ¿Has estudiado matemáticas? Las reacciones mostradas en diversos ámbitos por la propia experiencia son de cierta tipología *temeraria y a la vez errónea* que desearía destacar:

- Pues no lo aparentas, ¿es que hay que ser un tipo raro para ser licenciado en matemáticas? ¿O hay que tener un aspecto determinado?- Hay gente que piensa: "pues este debe ser muy listo", y entonces te cuenta la batallita" yo recuerdo que cuando estudiaba, las mates....."- Otras personas realmente es que no saben lo que son las matemáticas, simplemente tienen una imagen, una imagen de algo que utiliza un lenguaje muy difícil de entender y para el cual sólo estamos preparados unos pocos; y lo normal es que un hijo no las entienda, si no sería superdotado.
- Otras limitan nuestra ciencia a los números y a las cuentas. Además esta creencia está alimentada por muchos maestros de primaria, que no potencian en sus alumnos el desarrollo de capacidades de resolución de problemas, y

que siempre que hacen matemáticas utilizan métodos conductistas, haciendo cálculo, cálculo y más cálculo; dejando de lado la parte más importante que aplicaría métodos constructivistas y búsqueda de soluciones a situaciones cotidianas.

Y además todo unido a los cambios sociales, que pienso que estamos experimentando a toda velocidad, donde los esfuerzos intelectuales "no son necesarios" y donde es mucho más fácil decir: " yo no lo entiendo", "Pero esto, ¿de qué me va a servir en la vida", "por mucho que me lo expliques no lo voy a entender", que hacer un esfuerzo y sacar de dentro la intensidad para poder superar los baches y así experimentar la sensación de placer que produce finalmente el sí entenderlo, ya que como ellos dicen "no merece la pena..."

El texto precedente parece ofrecer una visión poco optimista de la situación. No es una carrera de velocidad, ¡sino de fondo!

En el texto se pretende precisamente lo contrario: ofrecer una imagen optimista de las matemáticas. Esta imagen radica en dos conceptos claves:
a) Su enseñanza y su aprendizaje (visión didáctica)
b) Ofrecer una visión utilitaria de los contenidos (visión epistemológica)

El binomio didáctica-epistemología nos proporciona una visión distinta de las matemáticas y del papel en la sociedad actual.

En esta obra se intenta mostrar cómo es posible ver las matemáticas como algo cercano, que nos rodea y que además es una de las herramientas más útiles que poseemos y que incluso puede llegar a ser percibido como algo interesante y necesario.
En el texto se menciona a menudo la frase "situación/es del mundo real", la interpretación y orientación que se le asigna a la misma es la de "situación en el mundo cotidiano y profesional".
De hecho se intenta mostrar la cara amable de las matemáticas, partiendo de consideraciones teóricas y aportando ejemplos próximos y cotidianos comunes a todos los lectores, sea cuál sea su área profesional y sus inquietudes.

Tanto es así que podemos decir que estamos inmersos en una sopa matemática: precios de productos, intereses bancarios, créditos, en la construcción, en el hogar, por todas partes. Preguntas del estilo ¿cómo un envase usual denominado tetrabrick tiene forma de paralepípedo? ¿Cómo recordar algún dígito omitido o olvidado de nuestra cuenta bancaria? Comentaremos algunas de estas situaciones, y a la vez ofreceremos respuestas, de una forma lo más amena y didáctica posible, con el objetivo de que sirvan de recursos educativos.
La obra está estructurada en dos partes. Una de ellas (podríamos denominarlo *el marco teórico*) invita a la reflexión del noble oficio de educar, ofreciendo tendencias pedagógicas y criterios que muestran el fracaso de la enseñanza tradicional de las matemáticas apostando por una orientación más utilitaria, novedosa y realista.
Se parte de la insatisfacción de la metodología y contenidos.
En una segunda parte (*podríamos denominarla el marco divulgativo*) se ofrecen ejemplos en los que la presencia de la matemática desempeña un rol importante en la formación y a la vez la conexión con diversas áreas de conocimiento, como una materia interdisciplinar que integra diversos estadios de conocimiento. Para ello se incluyen ejemplos que pueden servir de recursos educativos para potenciar el binomio enseñanza-aprendizaje.

Para empezar *¿Sabemos qué son las matemáticas?*. La palabra "matemáticas" viene del griego y significa aprender. Los antiguos griegos consideraban la matemática como el saber por excelencia. Aun hoy en día las vemos como algo etéreo sólo al alcance de unos pocos privilegiados, y sin embargo no sólo es la base de todos los demás conocimientos sino que es mucho más simple que muchos otros.
Si nos remitimos a los grandes pensadores no podemos omitir a Descartes. A fin de avalar las afirmaciones del Discurso *del método,* él escoge una parcela del conocimiento privilegiada en que sus principios puedan aparecer más claramente ejemplificados. Esta es precisamente la geometría, junto con la dióptrica. La matemática, para él, constituye "*un modo de habituar el espíritu a nutrirse con verdades y no contentarse con falsas razones*".
La matematización del pensamiento como camino científico es hoy un dogma, a veces llevado a extremos ridículos, de la ciencia moderna. Kant llega a afirmar que "*en cada una de las disciplinas de la naturaleza solamente se puede encontrar tanto de auténtica ciencia cuanto se encuentra en ella de matemática*" *(Metaphysische Anfangsgründe der*

Naturwissenschaft. Vorrede). Y la tendencia de todas las parcelas del conocimiento, que quieren aumentar su credibilidad y su prestigio, ha sido en los últimos tiempos, y sigue siendo, el revestimiento, natural o forzado, de las estructuras matemáticas.

Puede uno preguntarse: ¿Merece la matemática este lugar privilegiado que se le ha atribuido de una forma tan constante? No han faltado filósofos que han considerado injustificada y aun nociva esta influencia invasiva del pensamiento matemático. Heidegger, con un juego de palabras, ha tratado de expresar la cuestión: la matemática "ist nicht *strenger,* sondern nur *enger"* (no es más exacta, sino sólo más estrecha). Y no sin cierta razón. El conocimiento humano contiene muchas más riquezas que las que el pensamiento matemático puede abarcar. Existen realidades profundas que el hombre, más o menos conscientemente, ansía aprehender cognoscitivamente, y que escapan a la matemática. Ésta llega fundamentalmente a dominar la componente racional del pensamiento sin ni siquiera tocar otras facetas del conocimiento intelectual. Desde el conocimiento matemático al conocimiento personal, que involucra a todo el hombre, existe ciertamente un abismo. El matemático y filósofo B. Pascal ha expresado así en sus *Pensamientos* la diferencia entre el espíritu matemático *(esprit de géométrie)* y el espíritu de discreción *(esprit de finesse)*: "*En el primero los principios son obvios pero alejados del uso común, de modo que cuesta girar la cabeza hacia este lado por falta de hábito. Pero por poco que se la vuelva se ven estos principios plenamente y sería necesario tener el espíritu totalmente falseado para razonar mal sobre principios tan toscos que es casi imposible que se escapen. Pero en el espíritu de discreción los principios son de uso común y están ante los ojos de todo el mundo. No hay que girar la cabeza ni hacerse violencia. No hay más que tener buena vista, pero es necesario tenerla buena, pues los principios son tan finos y numerosos que es casi imposible que no se nos escapen. Ahora bien, la omisión de un principio conduce a error. Por tanto es preciso tener la vista bien limpia para verlos todos y además un espíritu bien sano para no razonar falsamente sobre estos principios conocidos*".

Mostremos algunas "caracterizaciones" de diversos pensadores - ya clásicos - de la historia de la matemática sobre su significado ofreciendo a la vez su interpretación. *Aristóteles* la denominó la ciencia de la "cantidad". *René Descartes* la ciencia del orden y de la medida. *Charles P. Steinmetz* se refirió a ellas como la ciencia más exacta cuyas operaciones permiten la demostración absoluta, siendo las verdades matemáticas relativas y condicionales. *Carl F. Gauss* afirmaba que es la reina de las ciencias, y la aritmética es la reina de las matemáticas. *Eric T. Bell* la definió como la reina y sirvienta

de la ciencia. *Felix Klein* consideró que es la ciencia de lo que es claro de por sí. *Henri Poincaré* destaca que la matemática no estudia objetos sino relaciones entre objetos; podemos reemplazar un objeto por otros simples siempre y cuando la relación entre ellos no cambie. *Benjamin Pierce* concluye que es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias. Más adelante *David Hilbert* contribuye diciendo que es un juego con reglas muy sencillas que deja marcas sin significado en un papel. Más recientemente destaca *Alfred N Whitehead* quien opina que, en su significado más amplio, es el desarrollo de todo tipo de razonamiento formal, necesario y deductivo. *Bertrand Russell* añade su propio comentario y valoración personal diciendo que la matemática se puede definir como la materia en la que nunca se sabe de qué se habla ni si lo que se dice es cierto. Finalmente, *Julio Rey Pastor* escribe que es la "ciencia de los conjuntos"; de los conjuntos finitos nace - por abstracción - el concepto de número como fundamento de toda la matemática.
De hecho estas definiciones no concuerdan en decirnos qué es la matemática. Unas enfatizan el aspecto formal, abstracto y "puro"; otras las aplicaciones y los usos. En la obra nos interesamos por estas últimas.

Espero que después de leer este ensayo se tenga un mejor concepto de esta ciencia y que pueda llegar a ser percibida como algo interesante. La expresión: el mundo está impregnado de matemática es una expresión válida para todas las épocas humanas: tan unidos están el contar y el comparar con las específicas actividades de los ciudadanos: pensar, hablar, construir.

En definitiva, la obra pretende ser de utilidad tanto para formadores como para ciudadanos con sentido crítico e innovador.

El autor

Capítulo I

Un viaje por las lagunas de la enseñanza de las matemáticas

" El rostro de Pi estaba enmascarado; se sobreentendía que nadie podía contemplarlo y continuar con vida. Pero unos ojos de penetrante mirada acechaban tras la máscara, inexorables, fríos y enigmáticos"

Bertrand Russell "La pesadilla del matemático" (en Nightmares of Eminent Persons)

Enseñanza y aprendizaje

Durante siglos, la enseñanza ha estado centrada hasta hace poco en la *lección magistral*, seguida del estudio personal con textos de apoyo y una evaluación individual con exámenes, método conocido como "enseñanza tradicional o enseñanza centrada en el aula".

Teorías recientes – constructivismo - apuestan porque sea el estudiante (*aprendiz*) el que construya las propias estructuras cognitivas basándose en cada momento en las estructuras que previamente posee, mientras el profesor juega el papel de colaborador. Estas teorías se traducen en el ámbito educacional en técnicas concretas: aprendizaje basado en situaciones reales (componente epistemológica) y aprendizaje en grupo (componente heurística).

Existen diversos factores que se oponen a la enseñanza tradicional, a destacar: la rápida evolución del conocimiento y de la técnica y a su vez la rápida obsolencia de las mismas - que reducen la utilidad de contenidos a favor de la capacidad de renovación -, las comunicaciones y los ordenadores que posibilitan nuevas formas de aprendizaje y comunicación/interacción entre profesor-alumno-alumno-profesor…..

Las estrategias docentes, y en particular las de las áreas denominadas *"de ciencias"*, tienen que estar fundamentadas en principios pedagógicos y estar al servicio de objetivos de formación formulados con claridad. La importancia de los objetivos de formación hace que sea necesario revisar periódicamente los objetivos curriculares, redefinir el concepto de *asignatura* y organizar los planes de estudio para mantenerlos a la altura de los cambios sociales, contenidos y metodologías didácticas.

Bajo este contexto, las matemáticas desempeñan un papel relevante cuya influencia en la vida cotidiana y la formación de ciudadanos es fundamental para adquirir aptitudes críticas.

El trabajo está focalizado en la innovación docente. Se exponen consideraciones generales metodológicas en las que se hace hincapié en que la enseñanza de las matemáticas debe cambiar, tanto en contenidos como en metodologías. Se presenta como alternativa válida *la modelización matemática* como herramienta de enseñanza, basada en el estudio de situaciones del entorno real.

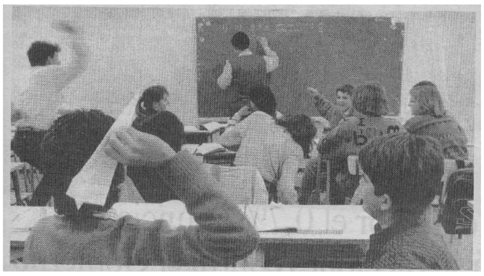
Tanto las consideraciones teóricas presentadas como los ejemplos del texto, pueden ser un referente para cualquier profesional de la enseñanza y a la vez una invitación a la reflexión para experimentar la metodología en los centros docentes.

Reflexiones generales sobre la enseñanza de las matemáticas y su papel

Es fácil comprobar que el impacto del siglo XX ha proporcionado cambios y evolución en las diversas áreas del conocimiento. Podríamos destacar que es una herencia importante del siglo que nos precede. En las empresas se introducen aparatos que como auténticos robots (*autómatas programables*) sustituyen al operario artesano, ordenadores que agilizan los movimientos contables, incluso el dinero se encuentra dentro de las conocidas tarjetas monedero. En cambio, notamos que la enseñanza de las matemáticas no encuentra adeptos que la hagan evolucionar.

Es relevante que a menudo se enseñan las matemáticas igual que hace 100 años: ¡¡¡en *blanco y negro*, el único cambio experimentado es la substitución de las tradicionales tablas de trigonometría y logarítmicas por las calculadoras de bolsillo - quizás por imperativo de los estudiantes - !!!

Se observan hechos significativos, comunes a todos los docentes, a destacar:
En ocasiones desconcertamos a los alumnos insistiendo regularmente sobre el tiempo que falta para terminar un examen.
A menudo, desde los inicios de la carrera docente, se sigue el mismo libro de texto; copiando al pie de la letra los contenidos en la pizarra. Lo más lamentable es que los contenidos son los mismos en la formación de futuros químicos que de economistas. De esta forma nos alejamos de sus aplicaciones en la especialidad del futuro profesional. En la fotografía que mostramos, se observa cómo la enseñanza tradicional de las matemáticas "llena de entusiasmo a los alumnos".



La Vanguardia Española, 16-12-1996

Vemos cómo los problemas planteados son los mismos, los datos son siempre suficientemente *buenos* y alejados de la realidad con el objetivo de que los resultados sean de la tipología que los alumnos llaman *exactos* (entenderemos enteros), desvinculándolos de esta forma de situaciones cotidianas.
De diversos debates afines a las orientaciones de la enseñanza, podemos enumerar algunas conclusiones:
El profesorado de matemáticas no conoce suficientemente las demás áreas de conocimiento. Este hecho provoca un enfoque poco utilitarista de los contenidos curriculares.
Hay profesores que piensan que ya es demasiado tarde para ellos y que quizás son algo mayores para usar nuevas tecnologías y metodologías.
Muchos profesores se sienten cómodos enseñando los temas tal y como se los habían enseñando a ellos y padecen, a la vez, de falta de confianza en sí mismos para introducir cambios.
Incluir datos y temas afines a la vida cotidiana exige un trabajo continuado. ¡Ya les va bien explicar lo mismo cada año! Organizar visitas, leer periódicos, (por ejemplo,

explicar las curvas de nivel a partir de un recorte de prensa del mapa del tiempo,interpretar gráficas económicas...) requiere una dedicación especial. Este hecho lo podemos caracterizar como un cierto temor a la innovación.

Trabajar en temas nuevos implica plantear evaluaciones coherentes con dichos temas, hecho que rompe el esquema de evaluación tradicional y cotidiana. Según Santaló (1975), "cuando alguien dice a un profesor de matemáticas que ha de enseñar temas nuevos, éste pide más horas de cátedra inmediatamente". En raras ocasiones se piensa en reordenar contenidos y redefinir métodos. Ortega y Gasset, en su obra *Misión en la Universidad* (1930) apuntaba: "*Uno de los males extraídos de la confusión de ciencia y Universidad ha sido ofrecer las cátedras, según las manías del tiempo, a los investigadores, los cuales son casi siempre, pésimos profesores que sienten la enseñanza como un robo de horas de su trabajo de laboratorio o archivo*"

En general, en las escuelas a menudo se explican grandes cantidades de conceptos matemáticos desconectados del mundo real, de manera que el estudiante no concibe su utilidad en los estudios que cursa. Todo ello conlleva a pensar que la enseñanza tradicional es totalmente inadecuada para el que aspira a aplicar las matemáticas - llámese economista, biólogo o ingeniero -. Considero que en la formación de futuros profesionales - usuarios de las matemáticas - la manera de presentar los resultados ha de ser distinta a la tradicional, que va más dirigida a comprender conceptos abstractos, aspectos muy convenientes para la formación de matemáticos, pero innecesarios para los usuarios - que son los que las tienes que aplicar -. Estos aspectos invitan a formular las siguientes preguntas: ¿Es preciso ofrecer a la enseñanza de las matemáticas otro tipo de orientación? ¿Es necesaria la introducción de aplicaciones y fomentar el debate entre matemáticas puras y aplicadas? ¡¡Las respuestas son obvias!!.

Personalmente, considero que es preciso reordenar los contenidos y metodologías para conseguir que aquello que hay detrás de la palabra "matemática" sea algo útil, ameno y divertido. Es preciso realizar una fuerte apuesta por la innovación y por las nuevas orientaciones. En matemáticas no podemos continuar utilizando pedagogía del siglo XIX con tecnología del siglo XXI. Y es que como decía *Bob Dylan* - en una apología de la innovación - " *Los tiempos están cambiando*".

El libro nace de la hipótesis de cuestionar la viabilidad de enseñar matemáticas de manera tradicional, partiendo de la idea de que formamos a ciudadanos/profesionales y no a futuros matemáticos, y a su vez, ofrecer una nueva orientación al carácter formativo de las matemáticas.

Como alternativa docente se propone la *modelización matemática* como herramienta válida y eficaz de enseñanza/aprendizaje. A pesar de presentar brevemente en este capítulo la idea de la modelización, sugiero la lectura del último capítulo del texto en la que se encuentra desarrollada la aportación más ampliamente y con más detalles.

El *modelaje matemático* consiste - de forma sintetizada- en formular un problema real en términos matemáticos, resolverlo y si es posible interpretar la solución en la terminología de la situación planteada.

En síntesis, se trata de favorecer la creatividad, motivar a los estudiantes de cara a las necesidades reales de los contenidos de matemáticas y poner a su alcance recursos y ejemplos cotidianos con el objetivo de esclarecer la aplicabilidad de los conceptos que les transmitimos para su formación; en definitiva: enseñarles a usar las técnicas aprendidas en un contexto cotidiano.

Expondré brevemente las intenciones iniciales y objetivos que pretendo que asuman los alumnos en la metodología de *la modelización matemática*:

a) Conseguir que los estudiantes asuman una actitud creativa.

b) Desarrollar su habilidad en las aplicaciones de las matemáticas y motivarlos para finalidades académicas y profesionales.

c) Capacitar a los estudiantes en las técnicas de modelización.

d) Proporcionar una imagen de las matemáticas y su enseñanza distinta de la tradicional.

e) Ayudar a adquirir y comprender las técnicas y conceptos matemáticos a partir de sus aplicaciones.

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas se ha desarrollado mediante clases teóricas en las que se explicaba una gran cantidad de conceptos matemáticos, desconectados de la realidad, de forma que el estudiante no veía en cierta manera la epistemología de esta bella ciencia. Los problemas y ejercicios eran los mismos cada año, de esta manera no era preciso seleccionarlos cada curso.

Algunos objetivos de este texto se pueden sintetizar en diversos aspectos:

1. Que el lector y, en particular, el estudiante adquiera un grado de motivación hacia los estudios cursados.

2. Que el lector y el estudiante descubran, a partir de situaciones reales, la utilidad de las matemáticas.
3. Presentar las matemáticas como una ciencia aplicada, en el sentido de que son "*...reina y a su vez sirvienta de las otras áreas de la ciencia...*".

Considero que las matemáticas desempeñan un papel importante. En las escuelas, la enseñanza de las matemáticas ha de tener un carácter utilitarista y aplicado. Es preciso seleccionar con sutileza los contenidos y enseñar a los estudiantes de qué forma los estudiantes pueden adquirir conocimientos y básicamente cómo utilizar los conocimientos aprendidos en la resolución de problemas procedentes de una situación cotidiana. En el proceso de enseñanza/aprendizaje hay involucrados tres aspectos fundamentales: cognitivos (área de conocimiento y contenidos), heurísticos (conjunto de habilidades y cómo se adquieren) y epistemológicos (en el sentido de impacto social de las matemáticas aprendidas).
Los cursos tradicionales de matemáticas desarrollados en las escuelas proporcionan al estudiante un conocimiento puramente matemático y no enseñan la vinculación de las técnicas aprendidas en un contexto cotidiano. Es preciso tener en cuenta que los estudiantes de hoy son futuros profesionales y que precisamente el grado de profesionalidad depende del proceso de aprendizaje actual.

De hecho, se trata de favorecer la creatividad, de motivar a los estudiantes de cara a las necesidades reales de los contenidos curriculares y a su vez facilitar un conjunto de recursos a su disposición con el fin de que comprendan la aplicabilidad de los conceptos que transmitimos en su formación; en síntesis: cómo usar las matemáticas en un contexto real.

Las matemáticas que, según el diccionario, son "*la ciencia de la cantidad y la forma*", están presentes en todas las actividades humanas y en cualquiera de ellas. Son la ciencia más humana de todas las ciencias; a pesar de que a menudo, parece como si alguien o algo se esforzara en distanciarlas de la realidad hasta el punto de que los alumnos - usuarios de las mismas - no acaban de ver su presencia o aplicación.

Las situaciones divulgativas plasmadas en el texto plantean - como elemento de debate y a su vez recuso educativo - una articulación del contenido de la matemática que favorece la perspectiva interdisciplinar y el pensamiento creativo, utilizando y descubriendo conocimientos matemáticos mediante el planteamiento de problemas reales extraídos de la vida cotidiana. También implica un cambio sustancial en la metodología, que adquiere una vertiente heurística, utiliza técnicas de modelaje matemático, utiliza nuevos recursos y elementos evaluativos. El enfoque supone un cambio fundamental en la concepción del rol del profesor, de su perfil formativo y de la preparación contextual y emergente de material.

Capítulo II

Las matemáticas en un día cualquiera

En una jornada de cualquier ciudadano podemos observar la presencia de las matemáticas en diversas facetas del entorno cotidiano. En este capítulo mostraremos situaciones que habitualmente nos acompañan a diario y que nos proporcionaran elementos de reflexión sobre el papel de las matemáticas y su influencia en nuestra vida cotidiana. Desde el desayuno pasando por el mercado, en la oficina, la papelería y el banco - entre otros aspectos de uso habitual - encontramos matemáticas. El simple sonido del temido despertador ya nos ofrece los buenos días mostrando números, a continuación suena el teléfono, la línea de autobús en que nos desplazamos, los horarios... realmente estamos inmersos en un baile numérico!

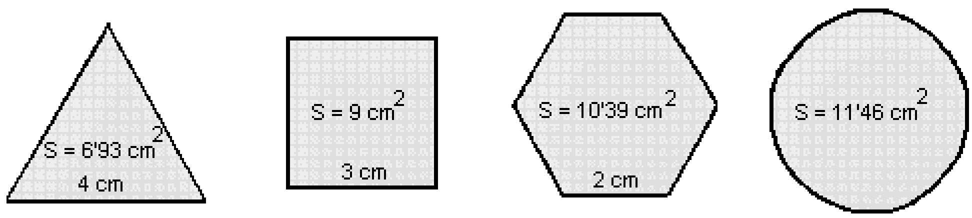
En la exposición he intentado evitar recargar el texto de formulismos propios de las matemáticas. A pesar de ello he considerado oportuno añadir los elementos necesarios con el fin de que quien desee profundizar en el marco teórico pueda deleitarse con ellos. Con este propósito, las personas que no sean "adictas" a las matemáticas pueden saltarse la formulación ya que para mostrar los ejemplos y la influencia de las matemáticas en nuestro entorno no son necesarios estos elementos.

¡Empecemos pues a pasear por las lagunas del quehacer matemático!.

En el desayuno

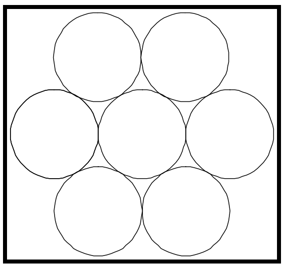
Si hemos de hablar de cosas cotidianas lo más normal será empezar por el desayuno. En concreto nos fijaremos en un producto que cada vez es menos habitual en nuestra dieta pero que sin duda es un excelente alimento y por su origen muy curioso e interesante. Nos referimos a la miel, aunque de lo que hablaremos realmente será de sus productoras, las abejas y de sus construcciones. Puig Adam, uno de los grandes pedagogos y matemáticos de la historia de nuestro país, propone en uno de sus libros de bachillerato (Matemáticas 7º curso, plan 1938, de P. Puig Adam, editado en 1951), "*un problema técnico resuelto por las abejas*".

Las abejas, para almacenar la miel, construyen paneles de celdas individuales que han de formar un mosaico homogéneo sin huecos desaprovechados. Eso lo podrían conseguir con celdas triangulares, cuadradas y hexagonales que son las figuras elementales con las que se pueden formar mosaico. Sin embargo, además existe la necesidad de que en la construcción del panel se utilice la menor cantidad de cera posible logrando la mayor superficie y capacidad en cada celda. Veamos cuáles son las superficies de un triángulo, un cuadrado, un hexágono y un círculo, todos de igual perímetro que, para fijar ideas, tomaremos de 12 cm.

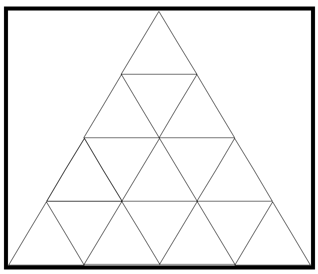


Formas posibles de panales

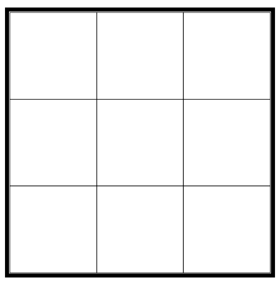
Observamos que la opción que posee mayor superficie es la del círculo, es decir, que si las paredes de cada celda fueran circulares tendríamos la mayor capacidad con el menor gasto de cera en cada celda. Sin embargo como también se ha de economizar espacio: un panel de celdas circulares ocuparía mucho espacio pues dejaría huecos inútiles. Además no se puede formar un mosaico con círculos con lo que no se pueden aprovechar paredes comunes para el ahorro de material. Por tanto la figura que asegura un menor gasto de cera, una mayor superficie de cada celda y, en general, el no desperdicio de ningún recurso de material y de espacio es el hexágono. Es la técnica empleada por las abejas.



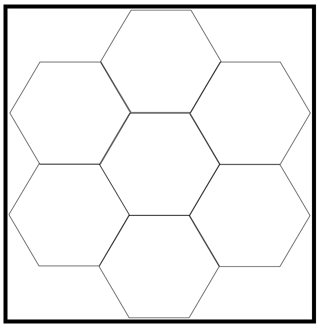
Mosaico triangular



Mosaico triangular



Mosaico cuadrado



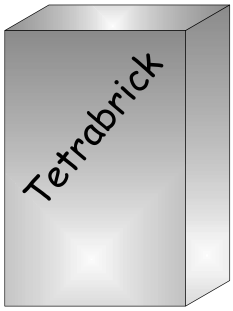
Mosaico hexagonal

Éste es un caso demostrativo de que en la naturaleza, con la ayuda de la evolución, se dan los casos más increíbles de coincidencia entre vida, eficiencia y optimización de recursos. Este recurso divulgativo muestra la influencia de la optimización geométrica en la naturaleza.

Foto panal de abejas

La leche y sus envases

Es difícil encontrar algún hogar en el que, durante el desayuno, no se tome un vaso de leche o de zumo de los que vienen en envases llamados “tetrabrick”. También podemos encontrar en ese tipo de envases diversos líquidos: vino, mosto, zumos, etc. Aunque todavía quedan envases de cristal, cada vez están más desplazados por los de plástico. Y en los supermercados la gran mayoría de los productos se presentan en el mencionado “tetrabrick” o “tetrapack”.

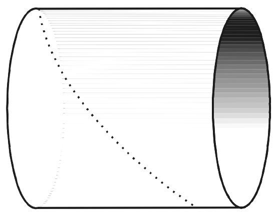


Envase "tetrabrick"

Sin embargo, ¿sabemos qué quiere decir este vocablo y de dónde viene?. Las matemáticas pueden ayudarnos a esclarecer el nombre de este pintoresco envase geométrico.

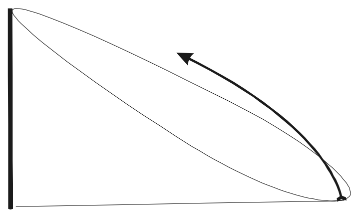
La palabra “tetrabrick” está formada por el prefijo griego “tetra”, que significa cuatro, y por “brick”, que en inglés significa “ladrillo” o “pack” que también en inglés significa “paquete”. Sabemos, por experiencia, que estos envases a los que nos referimos tienen forma de paralepípedo de base rectangular, es decir, que efectivamente se parecen a un ladrillo. Aquí tenemos justificado parte del nombre. Pero, ¿de dónde viene lo de “tetra”? Es evidente que no del número de lados - ya que un ladrillo tiene seis caras -. No, la explicación es otra. Hace unos años todos los líquidos se vendían en envases de cristal. Este tipo de envase es lo que hoy en día se llama ecológico ya que es reciclable. Sin embargo, en aquellos años esta faceta no se valoraba. Se consideraba más el hecho de que los envases, cuyo costo de fabricación era elevado, para su reutilización, debían recogerse, es decir, tenían que hacer el recorrido inverso al que habían realizado hasta ese momento, o sea, del consumidor al envasador. Esto era una gran molestia y requería una gran planificación. Sin embargo, sustituir estos envases no era tarea fácil. Debía encontrarse un envase fácil de fabricar y que fuera desechable.

Después de muchos inventos con más o menos acierto a alguien se le ocurrió la siguiente solución: se considera un cilindro de papel de aluminio (parecido al actual) pero formado por hojas de aluminio y cartón.

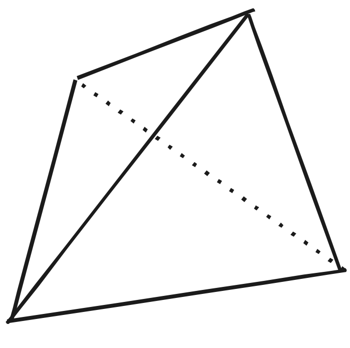


Cilindro inicial.

Este cilindro se cierra por uno de sus extremos y desde una esquina de ese extremo se realiza un corte en ángulo. La pestaña así formada se une al origen y se sueldan las dos aristas que se crean. El resultado es... un tetraedro, que como todos sabemos tiene cuatro lados, y de ahí surgió el vocablo "tetra".



Corte inclinado



Envase tetraédrico

Pronto se dieron cuenta, sin embargo, de que este envase presentaba nuevos problemas. Era difícilmente transportable, pues no se podía almacenar en ningún tipo de caja normalizada, y su apilamiento permitía la existencia de espacios inútiles entre los envases. Por ello, a pesar del éxito inicial que tuvo, sobre todo en productos lácteos, fue rápidamente sustituido por el envase que conocemos en forma de "ladrillo" al cual le quedó el nombre de "tetrabrick", que es fácilmente apilable y almacenable en cajas normalizadas. Este ejemplo muestra también el papel de la geometría en el uso cotidiano.

En el escaparate de una joyería

Si se han parado alguna vez delante de una joyería para apreciar la belleza de alguna pieza y mirar con disimulada frustración y prudencia su precio, se habrán dado cuenta de que existe cierto vocabulario propio de estos establecimientos. Este vocabulario es casi exclusivo de ciertos metales y piedras preciosas. Así, por ejemplo, se habla de quilates, centésimas, oro blanco, etc. ¡¡¡Y de sus medidas!!! Nos podríamos preguntar ¿pero el oro no es de color dorado? Ahora veremos qué significan estas unidades de medida y algunos de los términos empleados.

Oro

Con el oro se emplea el término "quilates" (K), que más adelante veremos que puede tener varias acepciones. En este caso se hace referencia a la pureza del oro utilizado en la joya en cuestión. Así, por ejemplo, podríamos tener 200 gramos de oro de 24 quilates. Partimos del hecho de que el oro puro tiene 24 quilates. Si a este oro se le añaden otros metales la aleación que se forma, lógicamente, pierde pureza y toma el valor en quilates proporcional a la parte en peso de oro que queda. Así, por ejemplo, si a 75 gramos de oro puro le añadimos 25 gramos de otro metal el resultado será lo que podemos llamar oro de 18 quilates (75% de oro y 25% de otro metal). También se utilizan las "milésimas", es decir, de mil partes del peso de la muestra, se obtiene cuántas son de oro puro. Con estas apreciaciones, en el escaparate de la joyería podríamos observar:

Oro de 24 quilates o 1.000 milésimas: sólo se vende en lingotes para coleccionistas con grabados en su superficie, inversores que compran oro en lugar de acciones, y fundamentalmente para talleres de joyería. Las joyas no se acostumbran a confeccionar con oro de 24 quilates pues es muy blando y no se trabaja bien.

Oro de 18 quilates o de 750 milésimas: llamado también de "primera ley". Es el que se suele utilizar en joyería y a lo que se refiere usualmente cuando se habla de joyas de oro, sobre todo en Europa.

Oro de 14 quilates, de 584 milésimas o de "segunda ley".

Oro de 9 quilates o de 375 milésimas: sólo se utiliza de forma habitual en Gran Bretaña. Cuando compramos una joya nos dicen su pureza en quilates, su peso, pero no se acostumbra a decir qué metales componen la aleación. Sin embargo, hay ciertas aleaciones de oro que reciben un nombre característico. Así tenemos:

Oro amarillo: con plata y cobre. Es fácil de trabajar.Oro verde: con plata.
Oro blanco: con plata, platino, paladio, níquel y zinc. Tiende a ser quebradizo si no se recuece. Oro rojo: con cobre. Oro rosa: dos partes de cobre y una de plata. Oro azul: 75% de oro y 25% de hierro. Oro blanco de paladio: con paladio. Oro blanco de níquel: con níquel.

Plata

Para medir la pureza de la plata se utilizan las "milésimas". Hemos de tener en cuenta que la plata es muy blanda, por lo que se la alea con algún otro metal, por lo general cobre.

Lo que se conoce como "plata de ley" es plata de 925 milésimas. Es decir, de cada 1.000 gramos de metal, 925 son de plata, y el resto, 75 gramos, de otro metal. También tenemos la plata de 800 milésimas o "plata de 2ª ley", es decir, 800 gramos de plata y 200 gramos de otro metal.

Piedras preciosas

Aquí también aparece el nombre de "quilate", pero en esta ocasión significa peso y el nombre exacto es "quilate métrico". Así un quilate métrico, según la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, es de 200 miligramos.

El peso de los diamantes también puede medirse en puntos, siendo 100 puntos igual a 1 quilate. Nótese que se habla de una piedra de 20 quilates y no de 20 quilates de piedras, es decir, el quilate se utiliza para determinar el peso de una única piedra.

Perlas

Las perlas se miden en "granos perla", siendo 1 grano = 250 gramos.

De paso por la papelería

Cualquier lector habrá utilizado en alguna ocasión hojas de papel para plasmar anotaciones. Hay muchos tipos y muchos tamaños del papel llamado de escritorio. Tenemos los folios, las holandesas, las cuartillas, etc.

En toda esta selva de medidas se intentó poner un poco de orden creando unas normas que se encuadraron en una normativa genérica llamada DIN, que sirve para estandarizar todo tipo de cosas: conectores, grafías, procedimientos... También se crearon normas DIN para las medidas del papel.

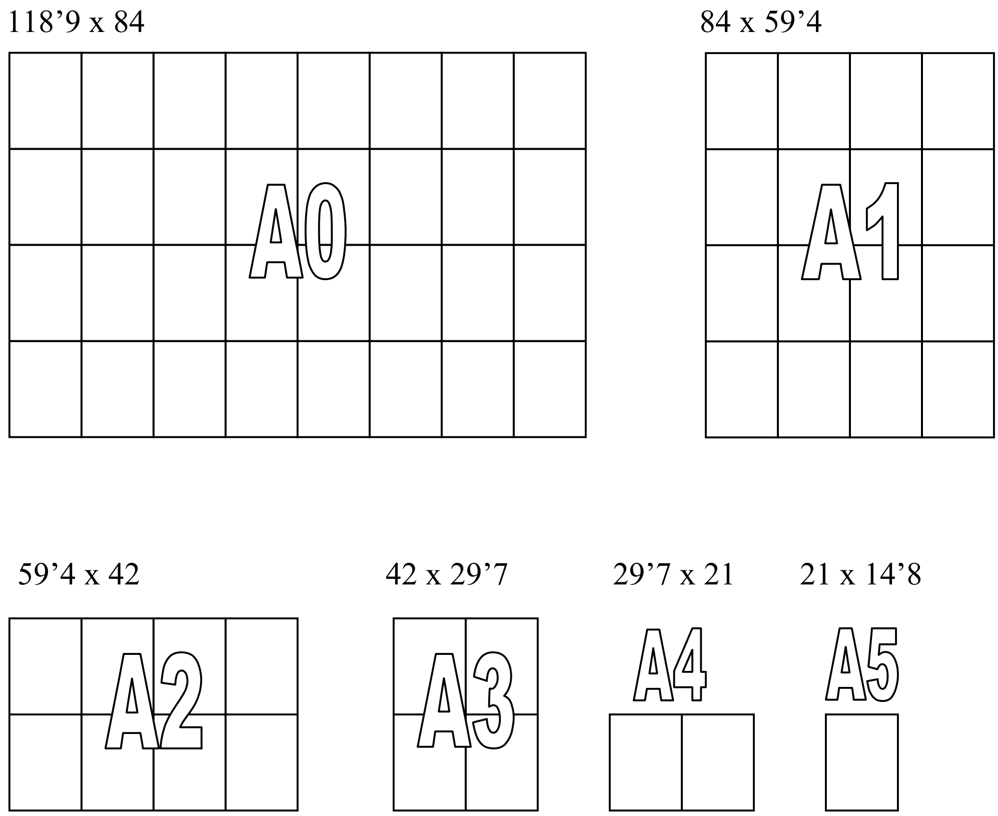
Uno de los tipos que podemos encontrar es el conocido como DIN A4, cuyas estrañas medidas son 21 cm x 29’7 cm.

Los tamaños contemplados en esta norma son:

Nombre	Medidas (cm x cm)
A0	118’9 x 84
A1	84 x 59’4
A2	59’4 x 42
A3	42 x 29’7
A4	29’7 x 21
A5	21 x 14’8

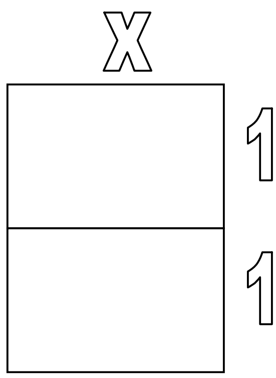
Medidas DIN

Vemos que el cociente entre el lado mayor y el lado menor es en todos los casos de 1’41.



El origen de esta norma se encuentra en la búsqueda de un rectángulo tal que la yuxtaposición de dos de ellos produzca otro rectángulo semejante (proporcional) al inicial, aunque mayor. Así que del mayor al menor todos los tamaños se obtienen dividiendo el mayor en dos rectángulos iguales cuyo lado mayor sea igual al menor del anterior. Con esto se consigue que, sea el tamaño que sea el que se necesite, las proporciones del mismo se mantengan. Y la pregunta es: con este fin, ¿qué medidas se les otorga a los rectángulos?

Si partimos del mayor. Con lo dicho anteriormente y llamando x al lado desconocido tenemos:

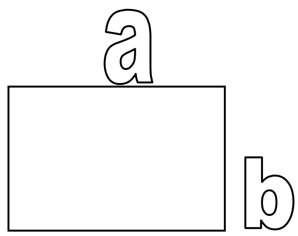


Un rectángulo de lados ”2” el mayor, y “x” el otro. Esto nos proporciona la relación siguiente:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

De donde se deduce que: $x = \sqrt{2}$

Se impuso otra condición y fue que el formato mayor, el DIN A0, tuviera un metro cuadrado de superficie. Esto condujo al planteamiento de dos ecuaciones, llamando a y b a los lados se obtiene:



$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$a \cdot b = 1$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son:

$$b = 0'840\,\mathrm{m} \quad a = 1'189\,\mathrm{m}$$

Con lo que el DIN A0 medirá: 118’9 x 84 cm. Para el resto de los tamaños, tal como se refleja en los diagramas anteriores, basta con ir dividiendo por dos este tamaño.

Es decir, la relación de superficies es como sigue:

2A4=A3

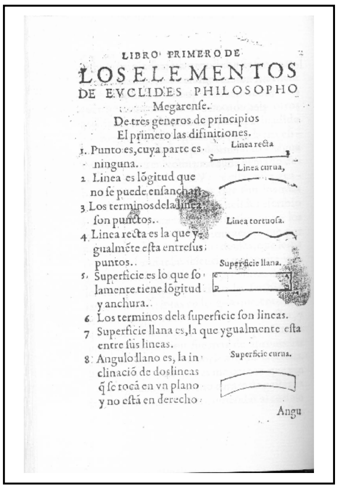
2A3=A2

2A2=A1

2A1=A0

Como aplicación de las medidas DIN reflexionaremos sobre su influencia en la realización de fotocopias; para ello ilustraremos previamente un resultado de la geometría elemental postulado por Euclides en su texto *Los elementos* del año 300 a.C aproximadamente.

"*Si dos figuras són proporcionales y "a escala" se verifica que si el cociente de sus longitudes es un valor a, entonces el cociente de sus superficies es a^2 y el de sus volumenes a^3, "a" se denomina factor de proporcionalidad* "



LIBRO PRIMERO DE
LOS ELEMENTOS
DE EVCLIDES PHILOSOPHO
Megarenſe.
De tres generos de principios
El primero las difinitiones.

1. Punto es, cuya parte es ninguna.
2. Linea es lõgitud que no ſe puede enſanchar.
3. Los terminos dela linea ſon punctos.
4. Linea recta es la que ygualmẽte eſta entre ſus puntos.
5. Superficie es lo que ſolamente tiene lõgitud y anchura.
6. Los terminos dela ſuperficie ſon lineas.
7. Superficie llana es, la que ygualmente eſta entre ſus lineas.
8. Angulo llano es, la inclinaciõ de dos lineas q̃ ſe tocã en vn plano y no eſtã en derecho

Linea recta
Linea curua,
Linea tortuoſa.
Superficie llana.
Superficie curua.

Angu

Texto "*Los elementos* " de Euclides

El clásico papel de carbón para realizar fotocopias ya es historia. Actualmente existe un tamaño, el DIN4, que con unas estrañas medidas mencionadas anteriormente reproduce cualquier tipo de documento, pudiéndose ampliar o reducir. Tal como hemos indicado anteriormente sabemos que las medidas de un DIN3 son el doble de un DIN4, esta tipologí de papel es la usada en los establecimientos de fotocopias.

Apliquemos el resultado de Euclides:

(Àrea D4/àrea D3)= (àrea D4/ 2àrea D4)=0.5= a^2; decir: a = la raiz cuadrada de 0.5 = 0.707.

En síntesis: (la longitud de un objeto de un D4/la longitud de un objeco en D3) vale 0.707. En otras palabras:

"*La longitud de un objeto en D4 es la longitud de un objeto en D3 multiplicada por 0,707*"

Imaginen un gráfico incorporado en un D3 de longitud 10 cm, al reducirlo a D4 su medida será de 10x0.707. En otras palabras: al reducir, la superficie se reduce un 50% pero el objeto se reduce en un 30%, ¡¡¡no a la mitad como alguien puede pensar!!!.

Este ejemplo es una muestra clara de la influencia que tienen las matemáticas sobre nosotros como ciudadanos con sentido crítico.

Codificación e identificación

En muchas situaciones nos hemos encontrado frente a los denominados códigos de barras, numeración de targetas de crédito, cuentas bancarias... Quizás en alguna ocasión nos hace falta recordar algún número - por ejemplo el denominado dígito de control de una cuenta corriente -; veremos como las matemáticas nos proporcionan cierta ayuda y nos enseñan a familiarizarnos con estas colecciones de números que ya forman parte de nuestra sociedad y conviven con nosotros.

1. Códigos de barras

Éstos constan, habitualmente, de 13 dígitos representados mediante barras negras y espacios blancos de tal manera que forman un código binario fácilmente leído por sistemas ópticos.

Estos trece dígitos (ABCDEFGHIJKLM) representan:

- Los 2 primeros (AB) forman el código del país de origen del producto. P.e. 84 es el de España, 83 el de Francia.
- Los cinco siguientes (CDEFG) identifican a la empresa productora.
- Cinco más (HIJKL)indican el código del producto asignado por la empresa.
- El último (M) es el dígito de control. Para calcularlo hemos de sumar los dígitos situados en posición impar (empezando por la izquierda y sin contar el de control). A esto le añadimos tres veces la suma de los dígitos situados en posiciones pares. El dígito de control es lo que falta a la suma hallada para ser múltiplo de 10.

Código de barras 1.

8 413871 003049

Ampliación de código de barras 1.

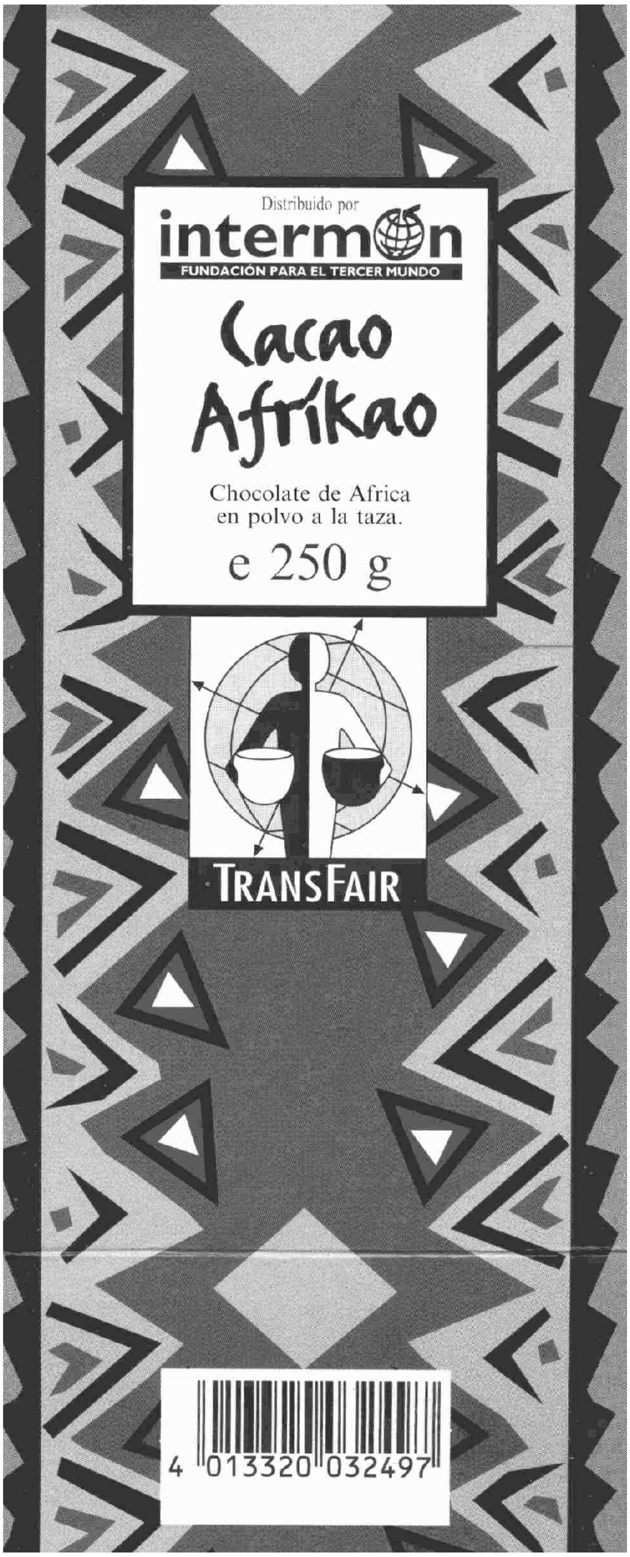
8+1+8+1+0+0+ 3x(4+3+7+0+3+4) = 18 + 3(21) = 18 + 63 = 81

90 – 81 = 9 Dígito de control

Código de barras 2.

5 + 0 + 2 + 3 + 0 + 5 + 3x(7+1+6+9+0+4) = 15 + 3x(27) = 15 + 81 = 96

100 – 96 = 4 Dígito de control



Código de barras 3.

4 013320 032497

Ampliación de código de barras 3.

4+1+3+0+3+4+ 3x(0+3+2+0+2+9) = 15 + 3x(16) = 15 + 48 = 63

70 – 63 = 7 Dígito de control

2. Código ISBN

Para la identificación de las colecciones de libros F.G. Forster introdujo en 1964 el sistema ISBN (*International Standard Book Numbers). *Este sistema es útil para la catalogación e identificación de ediciones de libros. Consiste en diez dígitos distribuidos en cuatro grupos más el dígito de control de la forma:

AB-CDE-FGHI-J

Los grupos son:

- ***Uno o dos dígitos (AB) que identifican generalmente el país de origen de la obra.***
- ***Tres, cuatro o cinco cifras (CDE) que determinan la editorial y la colección.***
- ***Tres, cuatro o cinco cifras (FGHI) que identifican el título y el autor.***
- ***El dígito de control (J) que puede valer desde 0 hasta 9 y la letra X como 10.***

El dígito de control que se obtiene ha de ser el que permita que se cumpla la siguiente fórmula:

$$10*A + 9*B + 8*C + 7*D + 6*E + 5*F + 4*G + 3*H + 2*I + 1*J = R$$

Siendo R un múltiplo de 11.

Así por ejemplo tenemos: "L'altra cara de les matemàtiques" de Joan Gómez i Urgellès

ediciones "El Cep i la Nansa" Vilanova i la Geltrú 2000 ISBN: 84-85960-45-9

10x8 + 9x4 + 8x8 +7x5 + 6x9 + 5x6 + 4x0 + 3x4 + 2x5 + 1x9 = 330

330 múltiplo de 11. Con lo cual el digito de control es correcto.

3. Tarjetas de crédito

Las tarjetas de crédito y débito que ofrecen entidades bancarias y grandes superficies se componen esencialmente de los mismos grupos de dígitos y del mismo algoritmo de cálculo del dígito de control. Son pocas las tarjetas que tienen 13, 14, 15 ó 17 dígitos. La mayoría de estas tarjetas (las más importantes) poseen 16 dígitos cuyo valor puede ser cualquiera entre 0 y 9, agrupados en grupos de 4 dígitos para su mejor visualización, que denotaremos:

ABCD EFGH IJKL MNOP

El significado de cada uno de ellos es el siguiente:

- 4 dígitos (A, B, C, D) corresponden al identificativo del banco o entidad que cede la tarjeta. Cada banco tiene un número diferente que puede variar según el continente, además ese identificativo también se relaciona con el tipo de tarjeta que es. p.e:

A B C D	Entidad
Visa	
4548	La Caixa
4940	Citibank
4916	Ccat(7electron)
4160	La Caixa (8electron)
4024	Bank of America
4052	First Cincinatti
4060	Navy Federal Credit Union
4128	Citibank (EEUU)
4131	State Street Bank
4215	Marine Midland
4225	Chase Manhattan
4231	Chase Lincoln First Classic
4232	Chase Lincoln First Classic
4241	Nat. Westminester Bank
4250	First Chicago Bank
4271	Citibank Preferred
4302	H.H.B.C.
4310	Imperial Savings

4317	Gold Dome
4387	Bank One
4428	Bank of Hoven
4811	Bank of Hawaii
4897	Village bank of Cincinatti
4019	Bank of America
4024	Bank of America
4052	First Cincinatti
4060	Navy Federal Credit Union
4128	Citibank (EEUU)
4131	State Street Bank
4215	Marine Midland
4225	Chase Manhattan
4231	Chase Lincoln First Classic
4232	Chase Lincoln First Classic
4241	Nat. Westminester Bank
4250	First Chicago Bank
4271	Citibank Preferred
4302	H.H.B.C.
4310	Imperial Savings
4317	Gold Dome
4387	Bank One
4428	Bank of Hoven
4811	Bank of Hawaii
4897	Village bank of Cincinatti
Mastercard	
5215	Marine Midland
5217	Manufacturers Hanover Trust
5233	Huntington Bank
5242	Chevy Chase Federal Savings
5254	Bank of America
5263	Chemical Bank
5273	Bank of America
5286	Chase Lincoln First
5317	Norwest
5323	Bank of New York
5329	Maryland Bank NA (MBNA)
5410	Citibank Preferred
5411	1st Fin. bank of Omaha
5414	Nat. Westminester Bank

5415	Colonial National Bank
5424	Citibank
5465	Chase Manhattan
5678	Marine Midland
1263	Chemical Bank
6207	Marine Midland
1033	Manufacturers Hanover Trust
1035	Citibank
1226	Huntington
6017	MBNA
1665	Chase Manhatten

Códigos de bancos en tarjetas de crédito

Tarjeta	Prefijo(A,B,C)	Número dígitos de la tarjeta.
Mastercard	51-55	16
Visa	4	13,16
American Express	34,37	15
Diners Club	300-305, 36, 38	14
Discover	6011	16

Prefijos de las tarjetas de crédito.

Usualmente los primeros dígitos se relacionan también con el tipo de tarjeta.

- El 5º dígito (E) corresponde al tipo de tarjeta e indica qué entidad financiera gestiona esa tarjeta.

Tipo	Entidad
3	American Express
4, 0, 2	Visa
5, 0	Master Card
6	Discover

Como se ve no es una norma rígida.

- 10 dígitos (FGH IJKL MNO) que identifican al usuario de forma única. En esta identificación no sólo se le proporciona un número de serie al cliente, sino que este número se relaciona también con el límite de crédito de la tarjeta y su fecha de caducidad, lo cual no quiere decir que se indiquen claramente estos dos datos, sino que indica el grupo en que se encuadra la tarjeta. Esto presenta cierta ambigüedad ya que como se sabe el límite de credito de la tarjeta puede variar a petición del usuario o a iniciativa del banco, pero esto no la hará cambiar de grupo, ya que, por ejemplo, una Visa Classic no tendrá nunca el límite de una Visa Oro.

- 1 dígito de control (P) que se calcula de la siguiente manera:

  - Consideremos los 15 dígitos de la tarjeta (16 menos el de control).
  - Para cada dígito de las posiciones impares empezando por la izquierda se calcula un dígito nuevo que es el que teníamos multiplicado por dos. Si el resultado de esta multiplicación es mayor de 9 se suman las dos cifras del número obtenido.
  - Se suman los números así calculados entre ellos y con los dígitos situados en las posiciones pares (incluido el de control).
  - Si el resultado es múltiplo de 10 la numeración de la tarjeta es correcta. Por tanto el de control es el que hace que la suma total sea múltiplo de 10.

  p.e. 1234 5678 9012 3452

1*2=2
3*2=6
5*2=10 -> 1+0=1
7*2=14 -> 1+4=5
9*2=18 -> 1+8=9
1*2=2
3*2=6
5*2=10 -> 1+0=1

2+6+1+5+9+2+6+1=32
2+4+6+8+0+2+4+2=28
32+28=60

El resultado es 60. Por tanto el código de la tarjeta: 1234 5678 9012 3452 es un código correcto de tarjeta.

La fundamentación matemática del algoritmo se basa en las propiedades de los números enteros, concretamente en lo que en matemáticas se conoce como "*el anillo de los enteros módulo 10*" y sirve tanto para estas tarjetas de 16 dígitos como para la inmensa mayoría de tarjetas de 13, 14, 15 y de 17 dígitos.

4. Cuentas corrientes

Las cuentas corrientes se componen de cuatro grupos de dígitos cuyo valor puede variar entre 0 y 9:

ABCD EFGH IJ KLMNOPQRST

- Los 4 primeros dígitos (ABCD) indican la entidad bancaria a la que pertenece la cuenta.
- Los 4 siguientes (EFGH) la oficina en la que se abrió la cuenta.
- I , J representan los dígitos de control.
- KLMNOPQRST identifican al usuario. La asignación de este número a cada cliente depende de cada entidad.

Los dígitos de control se calculan de la siguiente manera:

I se obtiene a partir del código de la entidad bancaria (ABCD) y de la oficina (EFGH) Por ello todos los primeros dígitos del código de control de una determinada sucursal serán idénticos.
J a partir del número de usuario.

- Se considera el número formado con los dígitos de la entidad bancaria seguida de los de la oficina, anteponiendo tantos ceros como sean necesarios para conseguir un número de 10 cifras.
- Se forma otro número con el usuario con tantos ceros delante hasta obtener 10 cifras.
- Con ello conseguimos dos números del tipo:

abcdefghij

- Con las cifras de cada uno de los números anteriores se calcula N en la fórmula:

N=(11-(a*2+b*2+c*4+d*8+e*5+f*10+g*9*h*7+i*3+j*6)) mod 11

Siendo "mod" la función módulo, es decir el resto de la división de las operaciones entre paréntesis entre 11. Es decir, si N = 11 se toma que N sea 0; si N = 10 se hace que N sea 1. Si N vale cualquier otro valor se deja tal cual.
Los dos números encontrados forman respectivamente los dígitos de control I y J. Veamos un ejemplo acalratorio:

Si tenemos el numero de Cuenta Corriente 1234 5678 987654321 y queremos obtener su Código de Control correspondiente realizaremos los siguientes pasos:

Unir el código del banco y de la sucursal con dos ceros delante: 0012345678

Aplicar la formula

11-[(1x1+2x2+3x4+4x8+5x5+6x10+7x9+8x7+9x3+10x6) MOD 11] = Nuevo Numero.

11-[(0x1+0x2+1x4+2x8+3x5+4x10+5x9+6x7+7x3+8x6) MOD 11] = 11[(231) MOD 11]= 11-0=11

(Al ser 11 se reemplaza por 0) = 0

Poner ceros delante del Codigo de Cuenta Corriente hasta que sean 10 digitos:

0987654321

Aplicar la formula:

11-[(1x1+2x2+3x4+4x8+5x5+6x10+7x9+8x7+9x3+10x6) MOD 11] = Nuevo Numero.

11-[(0x1+9x2+8x4+7x8+6x5+5x10+4x9+3x7+2x3+1x6) MOD 11] = 11-[(255) MOD 11]=11-2= 9

Por lo que el Código de Control correspondiente seria 09

Estos algoritmos más sofisticados son otra muestra de la potencia de las matemáticas y de su presencia en la vida cotidiana, siendo objeto de un recurso educativo para la formación de nuestros estudiantes y a la vez para la obtención de los respectivos modelos matemáticos.

Sumergidos en las denominadas "Unidades de medida"

En el paseo por una jornada habitual de nuestras actividades mundanas, hemos notado que en los aspectos laborales y lúdicos estamos innersos en diversas unidades de medidas: desde los diversos gramos del azúcar hasta los megas de nuestro ordenador. Es de sentido común poseer unos mínimos conocimientos sobre tal tipología de unidades de medida, su influencia, su significado, su utilidad (¡¡¡algunas obsoletas y que todavía forman parte el sistena educativo!!! a pesar de que alguien intente justificar su pesencia en los curriculums académicos).
La realidad es que tenemos que compartir nuestro quehacer con dichas unidades y saber apreciar su valioso significado.

Diversidad de unidades
Hay elementos a nuestro alrededor que utilizamos de forma inconsciente y habitual, de tal manera que llegamos a pensar que es tan normal que en todas partes se hace de la misma manera. Una de estas cosas es el sistema de unidades. Pero esto no es así. El metro, el kilómetro, el litro, el kilogramo, etc. a pesar de todos los esfuerzos por implantarlos como unidades comunes en todo el mundo no son, ni de lejos, medidas universales. En diversos territorios existen medidas ampliamente utilizadas distintas a las anteriores de las que hablaremos más adelante. Ello conlleva, aún hoy en día, penosas confusiones y malentendidos.
Supongamos que vamos al cine a ver la película "Armageddon", la cual narra los esfuerzos por evitar el choque de un meteorito inmenso contra La Tierra. En un momento dado de la película se narra: "*Cuando choque el meteorito contra La Tierra, 5 billones de personas morirán*". Quienes tengan idea del desarrollo de la población mundial, ahora estimada en 5.000.000.000 (cinco mil millones) de personas, saben que en toda la historia de la humanidad, si sumáramos todas las personas que han vivido en este mundo, no ha habido más que uno pocos miles de millones de personas. Entonces ¿Dónde está el problema?. La opción más sensata es que se han equivocado al traducir (el guión original está en inglés). Esto es cierto... en parte. El problema es que para los anglosajones un billón son mil millones, y para nosotros un billón es un millón de millones.

De la misma manera interpretan:

Nombre	Valor anglosajón	Valor internacional
Billón	1.000.000.000	1.000.000.000.000
Trillón	1.000.000.000.000	1.000.000.000.000.000.000

Dentro del programa espacial estadounidense, uno de los proyectos que más revuelo armó este final de siglo fue el de la investigación de Marte. A la “Pathfinder” (1996) y “Mars Global Surveyor” (1996) le siguieron la “Deep Space 1” (1998), la “Mars Climate Orbiter” (1998) y finalmente la “Deep Space 2” (1999) y la “Mars Polar Lander” (1998). De estas misiones que aportaron mucha información para el mejor conocimiento del planeta, dos de ellas acabaron en un sonado fracaso cuando se perdieron por fallos técnicos: la “Mars Polar Lander”, a la que un problema de interferencias en sus sensores de aproximación le hizo apagar los motores de frenado durante la fase de descenso, estrellándose contra la superficie marciana. La otra misión fracasada fue la “Mars Climate Orbiter” (MCO), y es de ésta de la que hablaremos por lo curioso y atractivo de la situación.

Esta sonda espacial fue construida por la empresa de construcciones aeroespaciales estadounidense “Lockheed Martín”. Como es costumbre en los mecanismos de medida hechos en ese país la empresa utilizó las unidades anglosajonas, es decir por ejemplo las millas, en la programación de la sonda, sin que nadie se diera cuenta que la empresa para la que trabajaban, es decir la NASA, utiliza para todos sus medidas y cálculos el sistema métrico decimal. Tampoco se dieron cuenta en la agencia espacial hasta que una vez en las proximidades de Marte notaron que había problemas. El resultado es conocido por todos, la sonda no entró en órbita marciana, simplemente se estrelló contra el planeta.

Pero ante estos problemas, ¿por qué no adopta todo el mundo las mismas unidades? Para intentarlo se creó en el siglo XVIII lo que se llamó el Sistema Métrico Internacional. Sin embargo veamos cómo estaba la situación hasta entonces realizando un breve repaso histórico.

Las antiguas medidas

A modo de ejemplo sirva la tabla adjunta, que es un extracto muy resumido de un manual de 1874.

Localización	**Unidad**	**Equivalencia**
Barcelona	1 cana	1,55 metros
Barcelona	1 metro	5,14 palmos
Barcelona	1 libra	0,40 Kg
Barcelona	1 libra medicinal	0,30 Kg
Barcelona	1 barrilón	30,35 litros
Barcelona	1 litro	1,05 mitadellas
Barcelona	1 cuartán de aceite	4,15 litros
Barcelona	1 litro de grano	0,17 cuartanes
Barcelona	1 media cuartera para áridos	34,75 litros
Barcelona	1 área	41,22 canas cuadradas
Bilbao	1 media azumbre	1,11 litros
Bilbao	1 media arroba de aceite	6,74 litros
Burgos	1 libra	0,46 Kg
Cáceres	1 libra	0,45 Kg
Lérida	1 cántaro de vino	11,38 litros
Lérida	1 litro	1,05 porrones
Lérida	1 litro de grano	1,30 picolines
Lérida	1 área	41,19 canas cuadradas
León	1 media cántara	7,09 litros
Madrid	1 media fanega para áridos	27,67 litros
Madrid	1 litro de grano	0,86 cuartillos
Málaga	1 media fanega para áridos	26,97 litros
Orense	1 cántara	15,96 litros
Oviedo	1 cántara	18,41 litros
Oviedo	1 media fanega para áridos	37,07 litros
Oviedo	1 litro de grano	1,72 cuartillos
Oviedo	1 día de bueyes(1800varas cuadradas)	12,57 áreas

Localización	Unidad	Equivalencia
Pamplona	1 robo para áridos	28,13 litros
Pontevedra	1 ferrado para medir maíz	0,57 concas
Tarragona	1 media cana	0,78 metros
Tarragona	1 metro	5,12 palmos
Tarragona	1 ermina para líquidos	34,66 litros
Tarragona	1 sinquena para aceite	20,65 litros
Tarragona	1 media cuartera para áridos	35,40 litros
Tarragona	1 litro de grano	0,16 cuartanes
Tarragona	1 área	41,58 canas cuadradas
Teruel	1 libra	0,36 Kg
Teruel	1 medio cántaro	10,96 litros

Medidas antíguas y localización.

Como puede apreciarse la lista de unidades de medida de productos habituales era tan grande como pintoresca. Pueden verse los diferentes nombres que se le daba en zonas diferentes a medidas parecidas:

Barcelona	1 barrilón	30,35 litros
Pamplona	1 robo para áridos	28,13 litros

Aunque el "barrilón" y el "robo para áridos" medían productos diferentes puede observarse que la cantidad representada es parecida. Estos ejemplos dan idea de lo difícil que debía ser el comercio con una nueva ciudad o con un nuevo producto. A esto hay que añadir que las mismas medidas en lugares próximos tenían valores diferentes:

Barcelona	1 litro de grano	0,17 cuartanes
Tarragona	1 litro de grano	0,16 cuartanes

Orense	1 cántara	15,96 litros
Oviedo	1 cántara	18,41 litros

Para tener una ligera idea de lo que podía llegar a variar una misma unidad dependiendo de dónde se usara mostramos el siguiente cuadro:

	Unidad	Equivalencia	Lugar de utilización
Longitud	Pie	0,259 m hasta 0,302 m	Cataluña, Baleares, Valencia, Castilla
	Vara	0,772 m hasta 0,839 m	Toda España
Masa	Arroba	11,5 kg hasta 12,5 kg	Castilla, Galicia, etc
	Libra	372 g hasta 579 g	Casi toda España
	Onza	23 g hasta 37 g	Las mismas zonas que la libra
Capacidad	Azumbre	0,66 l hasta 2,016 l	Castilla, Galicia, Vizcaya, etc
	Cántara	Aprox. 16,131	Toda España
	Cañado	32 l hasta 37 l	Galicia, etc
	Fanega	10 l hasta 55,5 l	Toda España excepto Galicia, León y Navarra.
	Carga	121,6 l hasta 222 l (entre 3 y 4 fanegas)	Las mismas zonas que la fanega
	Pinta	0,735 l hasta 0,808 l	Aragón, Navarra

Variación de las medidas antiguas en el estado español.

Si hablamos de moneda la situación se complica mucho más. Ésta es sin duda la unidad que sufriría más transformación a lo largo del tiempo.

También se definió la unidad monetaria que fue el Real con las siguientes equivalencias:

1 escudo = 10 reales

1 doblón de Isabel = 100 reales

1 real = 10 décimas

1 medio real = 5 décimas

1 doble décima = 2 décimas

1 décima real (la unidad)

1 media décima = 5 centésimas.

El origen de muchas de ellas es desconocido, sin embargo las más conocidas y que todavía perduran en muchos países tienen su origen más inmediato en los antiguos romanos. Éstos, como otros pueblos de la antigüedad, cuantificaban su entorno relacionándolo con las dimensiones de su cuerpo y con la duración de los ciclos naturales. Así tenemos que para las longitudes tenían el pie (pes) que medía 29,58 cm. Cada pie se dividía en 12 pulgadas (unciae) que era la longitud de la falange distal del dedo pulgar. Cinco pies eran un paso (passus), 1,479 metros, que es lo que se recorría con una doble zancada. Diez pies eran una "pertica", 2,957 metros; 120 pies (doce perticae) eran un "actus vorsus", literalmente la longitud de una arada y 1.000 "passus" una milla romana, es decir, 1.479 metros, equivalente a ocho "estadios" griegos. El pie se podía dividir en "digiti", la anchura de un dedo, y en cuatro "palmi", palmos de 7,4 cm que era la distancia entre la base del índice y el meñique con la mano cerrada.

Había otras medidas de tradición egipcia como el "palmipes", de 36 cm, el "cubitus" o "ulna" de 44 cm que era la longitud del antebrazo desde el extremo del dedo corazón al codo y el "gradus" de 73 cm.

De entre todas las demás medidas que utilizaban destacaremos por evolución hasta hoy la libra romana de 327,45 gramos, la onza (uncia) que era la doceaba parte de una libra, es decir 327,45 gramos.

La milla

Tan pintoresco como su origen es su evolución, ya que de una única unidad han surgido varias, todas ellas llamadas "milla" igualmente, y cada una con un abanico de valores diferentes según su uso y la época de utilización. La milla actual inglesa fue definida durante el reinado de la reina Isabel y se dispuso que constase de 8 "furlones" de 40 "perches" de 16 ½ "feet each", esto es, de 1760 yardas de 3 pies cada una.

Además tenemos la milla náutica que se utiliza para medir distancias y velocidades en el mar. Se define como la longitud del minuto de circunferencia de círculo máximo de la Tierra, supuesta esférica (5.400 millas o bien 10.000 Km), lo que da una milla de 1851,852 metros, o bien el minuto de meridiano medido en la latitud 45º. Esta longitud es de 1851,83 metros. Por todo esto se toma la milla náutica como:

1 milla náutica = 1852 metros

Las unidades relacionadas son:

3 millas náuticas = 1 legua marina

1 milla = 3 cables de 185,2 metros

1 cable = 111 brazas

En EE.UU. la milla geográfica tipo es la longitud de un minuto de latitud de una esfera cuya superficie se supone igual a la de la tierra. Esto proporciona una milla de 6.080,27 pies, que contrasta con la milla común también de EE.UU. que tiene 5280 pies. Para no ser menos también tienen su propia milla náutica que equivale a 1853,24 metros.

¡¡¡Y para acentuar la idiosincrasia británica, su Almirantazgo toma la milla de 6080 pies, para así llegar antes a la batallas!!!

Mostraremos la equivalencia de millas que han estado en uso:

Tipo de milla	**Millas Inglesas (legales)**
Alemana corta	3,897
Alemana geográfica	4,611
Alemana larga	5,753
Austriaca	4,714
Danesa	4,684
Escocesa antigua	1,127
Inglesa (geográfica)	1,153
Irlandesa	1,273
Portuguesa	1,296
Prusiana	4,680
Sueca	6,648
Suiza	5,201
Kilómetro	0,621

Tipos de millas.

Otras unidades del sistema anglosajón son:

Nombre	Valor
1 pulgada	2,54 cm
1 pie	12 pulgadas
1 yarda = 3 pies	91,44 cm
1 braza = 2 yardas	1,829 metros
1 milla terrestre = 1.760 yardas	1,609 km
1 milla marina = 6080 pies	1,853 km
1 onza	28,3 g
1 libra	454 g
1 pinta	0,4731 l
1 galón = 8 pintas	3,785 l
1 acre	0,4047 ha

Medidas anglosajonas.

Sistema Métrico Decimal

En 1790, poco después de la Revolución Francesa (1789), la constituida Asamblea Nacional Francesa acordó la creación de un nuevo sistema de pesos y medidas. En marzo de 1791 escogen el nombre de la unidad básica a la que llaman “metro”, nombre que procede del griego “metron” que significa “la medida”.

Finalmente, el 10 de diciembre de 1799 el Consejo Ejecutivo francés decreta los nuevos valores de los pesos y medidas basados en el metro. Estos valores son aceptados por muchos países a lo largo del siglo XIX, a pesar de que durante mucho tiempo se siguió, en la mayoría de ellos, utilizando los sistemas tradicionales de medida en la vida cotidiana de la gente. Por ejemplo en Alemania fue adoptado oficialmente en 1872, en Francia y España en 1875.

En esa época se definió el sistema métrico como cinco unidades simples:

Metro: unidad de longitud igual a la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano desde el polo norte al ecuador. Equivale a 3 pies y 7 pulgadas aproximadamente.

Área : unidad de superficie igual a 100 metros cuadrados. 100 Áreas son una Hectárea, y 1 Área son 100 centiáreas.

Metro Cúbico: unidad de volumen y solidez.

Litro: unidad de capacidad igual a un decímetro cúbico.

Kilogramo: unidad de peso igual al peso de un decímetro cúbico de agua destilada a 4 grados centígrados en el vacío. Como múltiplos tiene el quintal métrico (100 Kg), la Tonelada de peso (1.000 Kg). Como unidades inferiores el hectogramo (0,1 Kg), el decagramo (0,01 Kg) y el gramo (0,001 Kg).

Cuatro auxiliares múltiplos. Se anteponen delante del nombre de la unidad:

Prefijos	Valor	
Múltiplos:		
Miria	*10.000*	
Quilo	1.000	
Hecto	100	
Deca	10	
Submúltiplos:		
Deci		0,1
Centi		0,01
Mili		0,001

Prefijos del Sistema Métrico Decimal.

El metro

Tal como apuntamos anteriormente el metro se definió inicialmente como la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre. Esto fue debido a que la topografía estaba en su apogeo, con unos conocimientos amplios sobre las mediciones de distancias sobre la superficie de La Tierra.

A pesar de esto la dificultad de medir el cuadrante entero era muy grande, por lo que se pensó en medir únicamente un arco bastante extenso cuyos extremos se hallaran uno al norte y el otro al sur del paralelo 45 norte. Se eligió la parte del meridiano comprendida entre Dunquerque y Barcelona, cuyos extremos se encuentran a nivel del mar y el arco pasa por París (no olvidemos que estas medidas estaban impulsadas por los franceses).

A lo largo de los años estas definiciones irían cambiando, haciéndose más precisas y a su vez adaptándose a los nuevos tiempos. Como puede verse, aunque el intento de definición de la unidades era bueno, adolecía de ciertos problemas como son que el metro se definió respecto a algo muy inexacto (respecto a un cuadrante de meridiano), a pesar que la topografía estaba muy adelantada, o bien que se definía una unidad de peso como el kilogramo, que actualmente se redefinió como unidad de masa (la unidad de peso es el kilopond o kilopondio y es la fuerza con que la gravedad standard de la tierra atrae una masa de un kilogramo).

También tenemos que no se utilizan los prefijos de múltiplos y submúltiplos para todas las unidades. Así, por ejemplo tenemos el kilogramo, con sus múltiplos el Quintal y la Tonelada, la superficie definida por el área en lugar de por el metro cuadrado como en la actualidad, o definir el metro cúbico como unidad de volumen o solidez (sea lo que sea lo que pretendieron definir con solidez).

Sin embargo, a pesar de lo comentado, este nuevo sistema de medidas supuso un gran avance ya que era una costumbre generalizada que cada grupo humano tuviera su propio sistema de unidades, es decir, cada estado, reino, condado, ciudad y pueblo medían con sus propias unidades, con lo que eran frecuentes las disputas por las medidas de las magnitudes (cantidades, pagos, etc.) entre poblaciones cercanas.

Así, por ejemplo, el metro tuvo las siguientes definiciones:

1.- Era la 1/10.000.000 parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París.

2.- La longitud entre las muescas de la barra de platino iridiado guardada en Sèvres, medida a 0ºC.

3.- La longitud de 165.076.373 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los denominados "niveles 2p10 y 5d5 del átomo de kriptón-86".

4.- Longitud de la trayectoria de un rayo de luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299.792.458 de segundo.

Sistema Internacional de Unidades

En 1960 se adoptó el llamado Sistema Internacional de Unidades que pretendió actualizar y universalizar el sistema de medidas. En ella se pretendió definir las unidades básicas de las magnitudes fundamentales que se establecieron en siete:

Magnitud	Nombre	Abrev.	Definición
Longitud	metro	M	Distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299.792.458 segundos
Masa	kilogramo	kg	Masa del cilindro patrón de platino iridiado que se conserva en Sèvres (Francia). Es la única definida respecto a un objeto y con un prefijo (kilo).
Tiempo	segundo	S	Duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo cesio 133.
Corriente eléctrica	ampere	A	La intensidad de una corriente constante que manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produce una fuerza igual a $2x10^{-7}$ newton por metro de longitud.
Temperatura	kelvin	K	Es 1/273,16 partes de la temperatura termodinámica del punto triple del agua(1).
Cantidad de sustancia	mol	mol	Cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0’012 kilogramos de carbono 12.
Intensidad luminosa	candela	cd	Intensidad, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540x10^{12}$ hertz y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1/683 watt por estereorradián.

Sistema Internacional de medidas.

(1) *Punto triple del agua representa las condiciones de presión, volumen y temperatura que hacen posible que convivan simultáneamente los tres estados (sólido, liquido y gaseoso).*

Además define:

Unidades suplementarias: radián, estereorradián.

Unidades derivadas: farad, hertz, joule, newton, ohm, pascal, volt, wattcoulomb, weber, tesla, henry. etc.

La utilización de múltiplos y submúltiplos viene representada por los valores que muestra la siguiente tabla:

Prefijo	Sím.	Valor	Equivalente
yotta	Y	*1.000.000.000.000.000.000.000.000*	10^{24}
zetta	Z	1.000.000.000.000.000.000.000	10^{21}
exa	E	1.000.000.000.000.000.000	10^{18}
peta	P	1.000.000.000.000.000	10^{15}
tera	T	1.000.000.000.000	10^{12}
giga	G	1.000.000.000	10^{9}
mega	M	1.000.000	10^{6}
kilo	k	1.000	10^{3}
hecto	h	100	10^{2}
deca	da	10	10^{1}
-	-	1	10^{0}
deci	d	0,1	10^{-1}
centi	c	0,01	10^{-2}
mili	m	0,001	10^{-3}
micro	µ	0,000.001	10^{-6}
nano	n	0,000.000.001	10^{-9}
pico	p	0,000.000.000.001	10^{-12}
femto	f	0,000.000.000.000.001	10^{-15}
atto	a	0,000.000.000.000.000.001	10^{-18}
zepto	z	0,000.000.000.000.000.000.001	10^{-21}
yocto	y	0,000.000.000.000.000.000.000.001	10^{-24}

Prefijos Sistema Internacional.

Nuevas unidades

Con la llegada de las nuevas tecnologías y áreas de conocimiento - como la informática - se creó la necesidad de introducir nuevas unidades o, mejor aún, adaptar las que existían a las nuevas necesidades de inicios del siglo XXI.

En el caso de la informática la necesidad se justifica en el hecho de que todo el sistema algebraico utilizado, es decir, desde los números, las operaciones matemáticas, las relaciones algebraicas se utilizan todas en un universo binario, es decir, con solamente dos símbolos, el cero y el uno, lo que se llama un sistema binario, a diferencia del habitual que es el decimal. En él tenemos que los primeros dígitos se representan como muestra la tabla:

Valor decimal	Valor binario	Valor hexadecimal
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Sistema binario y hexadecimal.

También se muestra el sistema hexadecimal, con sus dígitos del 0 al 9 y de la A a la F, ya que también se usa a menudo en informática para dar compactado un valor binario, pues cada cuatro dígitos binarios forman un dígito hexadecimal.

Así, por ejemplo: 1b+ 1b = 10b

101b + 11b = 1000b

1010b = 10d = Ah

Siendo:

b: binario.

d: decimal.

h: hexadecimal.

En informática a cada uno de estos valores “0” y “1” se les llama “bit”, que es la unidad fundamental de información. No tiene submúltiplos y sus múltiplos son:

Unidad	Abreviatura	Valor en “bits”	Potencia de dos
Bit	b	1	0
Kilobit	Kb	1024	10
Megabit	Mb	1024 Kb=1.048.576	20
Gigabit	Gb	1024 Mb	30
Terabit	Tb	1024 Gb	40

Múltiplos del bit.

Como puede verse los múltiplos son potencias de 2 no de 10 como en las unidades del Sistema Internacional: 1 Kb = 2^{10} bits; 1 Mb = 2^{10} bits = 2^{10} Kb

Existen otros múltiplos que vienen dados, no por la cantidad que representan, sino por el número de bits que utilizan:

Nombre	Número de bits
Nibble	4 bits p.e. 1010
Byte, octeto	8 bits p.e. 10101010
Word, palabra	Vriable: 4, 8,16, 32, 64,128

Múltiplos del bit.

El término “palabra” se utiliza como el número de bits que se pueden procesar simultáneamente, con lo cual dependerá de cómo se trate la información o de la capacidad de proceso del microprocesador que utilicemos.

De estos múltiplo el más usado es el “byte”, que a su vez puede utilizar los mismos prefijos que el “bit” para formar sus múltiplos (kilobyte, gigabyte, megabyte, terabyte) con igual valor, pero en bytes: 1 kilobyte = 1.024 bytes

¿Hollywood nos engaña? Distorsiones entre la ficción y la realidad.

Cualquiera de nosotros ha ido al cine en alguna ocasión, y ha oído expresiones como: "Esto sólo pasa en las películas". Y es cierto, porque muchas de las situaciones reflejadas en la pantalla no convergen con la realidad, cosa que las matemáticas y la física pueden explicarnos; ¡esas maravillas del séptimo arte!

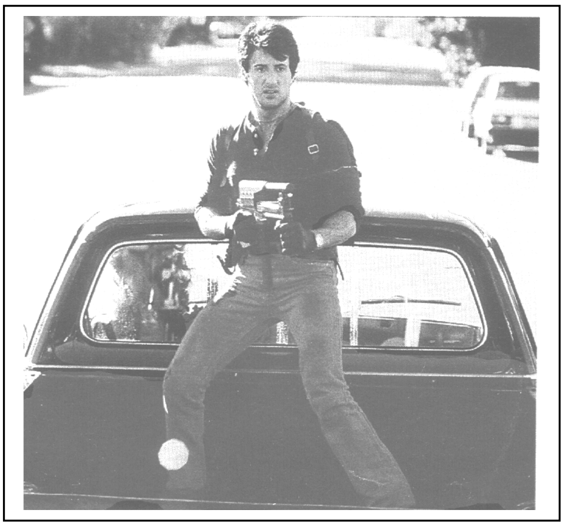
Un ejemplo de ello lo encontramos en películas como la guerra de las Galaxias donde se puede oír la frase: - *Abrid fuego cuando diviséis el objetivo*- y a continuación se observa el lanzamiento de un misil destructor. La tecnología actual nos permite destruir objetivos sin necesidad de tenerlos a la vista motivo por el cual el dialogo anterior está totalmente fuera de lugar. Por eso podemos preguntarnos ¿por qué en estas naves tan avanzadas tecnológicamente hace falta visualizar el objetivo antes de abrir fuego?
La física enseña que las explosiones en el espacio no hacen ruido porque no hay oxigeno, contrariamente a lo que el filme anterior nos muestra.

Otra escena habitual de las películas Hollywoodienses es la explosión de un coche por un impacto de bala en su tanque de gasolina, o por una simple colisión entre vehículos, la cual cosa sólo podría suceder si el depósito se encontrase lleno en una cuarta parte y que los vapores de gasolina entrasen en contacto con una llama. Según cálculo de probabilidades, e incluso en estas condiciones, sería poco probable que el coche explosionara.

Si queremos hablar de situaciones imposibles debemos pensar en el original asesino que se esconde entre los asientos delanteros y traseros de un vehículo, y que curiosamente siempre pasa desapercibido por la víctima. Pues bien, el asesino más que asesino es contorsionista ya que las medidas de ese espacio son habitualmente: 100x30x45 cm. El espectador suele ser engañado gracias al ángulo que ofrece la cámara el cual no le permite apreciar la escasez de espacio.

Los tiroteos suelen ser muy usuales también en las pantallas. Éstos se producen la mayoría de veces entre vehículos que circulan a más de 100km/h, cambiando de carril frecuentemente, etc. Las matemáticas nos permite descubrir que las posibilidades de acierto son de una entre cien mil.

Ya que hablábamos de disparos, podemos retomar el tema gracias a la conocida ametralladora de Rambo que funciona a ráfagas de 800 disparos por minuto. Sus cargadores son de 100 balas y hace falta cambiar el cañón cada 10000 disparos, si tenemos en cuenta que en la película se cambia el cargador en menos de 3 minutos (cosa que se contradice con la realidad) Rambo habría muerto ya hace tiempo.



Continuando con el tema de disparos, pero ahora en otra categoría. Podemos decir que muchos misiles son disparados desde un avión en estado de reposo, cosa que no tiene nada que ver con la realidad en la cual las armas no se pueden activar hasta que el avión no ha despegado y su tren de aterraje ya no toca en el suelo.

Salgamos ahora al espacio. Las matemáticas y la física demuestran que los cuerpos expuestos al vacío del espacio no se deforman ni estallan, contrariamente a lo que la película "Atmósfera cero" nos presenta. Un organismo humano expuesto a la carencia de atmósfera moriría ahogado o congelado, pero, de ninguna manera, una variación de presión lo haría estallar tal como la última película citada nos muestra.

Otra aberración de la física del cine viene de la mano de *Independence Day* donde la ola de fuego lanzada por los enemigos que recorre el túnel que conecta la isla de Manhattan con el continente hace que la protagonista se esconda en un lavabo del cual sale ilesa. Cosa imposible en la práctica ya que la ola de fuego hubiera consumido todo el oxígeno y nuestra protagonista se hubiera asfixiado.

Las bombas de relojería siempre llevan aplicado un reloj que marca el tiempo que falta hasta la explosión. Momento que sólo conoce aquél que la ha fabricado, ya que la bomba prescinde de este dispositivo indicador para su funcionamiento el cual sólo se le aplica en las películas para que el espectador sufra, hasta que el protagonista lo desconecta en el último segundo.

También algunos objetos tecnológicos que aparecen en la gran pantalla son utilizados de distinta manera a como funcionan en realidad. En ocasiones cuando dos personas se comunican a través de un walkie-talkie hablan simultáneamente, cuando este aparato es de comunicación unidireccional y es preciso mantener el botón pulsado mientras se está hablando y sin apretar para escuchar a la otra persona.

En las películas sus conversaciones son simultáneas aunque utilicen el célebre término: "corto". En muchas películas también nos podemos encontrar la siguiente situación cómica: en una comisaria de policía se recibe una llamada de un delincuente, un psicópata o un secuestrador generalmente. Los policías intentan mantener conversación con el presunto "malo" para dar tiempo a sus compañeros a localizar la llamada, cuando de repente se corta, lo que imposibilita la localización de ésta y permite que el suspense se alargue hasta el fin del filme. Cabe decir que ya hace años que existe un aparato llamado "Caller Id" que permite, en tiempo real, conocer el lugar desde donde se está efectuando la llamada. Podemos encontrar un ejemplo cotidiano de ello en los teléfonos móviles y algunos de domésticos de sobremesa que nos muestran el número de nuestro interlocutor en la pantalla.

Otra manipulación de la realidad la encontramos en la película *Misión Imposible* que en su final nos presenta una espectacular persecución con una batalla entre los protagonistas en la que los dos actores se pelean encima de un tren de alta velocidad que enlaza Francia con Inglaterra por el túnel del Canal de Mancha. Enganchado al tren va un helicóptero de manera que el helicóptero se ve obligado a maniobrar para esquivar otro tren que viene de frente. Sin tener en cuenta el hecho de la ínfima probabilidad de que dos personas puedan pelearse encima de un tren circulando a más de 300 Km./h, tenemos que tener en cuenta que este tren que funciona con energía eléctrica a través de un tendido de una catenaria que no permitiría el paso del helicóptero, pero a demás debemos recordar que el Eurotúnel tiene una medida de 7,6m, espació demasiado pequeño para que un helicóptero pueda maniobrar en su interior.
A parte de lo anteriormente expuesto el filme también se separa de la realidad en el cruce de los dos trenes en el interior del canal de la Mancha ya que en éste se circula por túneles separados para ambas direcciones.

Podemos hablar de King-Kong, el orangután de 2900 kilos y 145 metros de altura, fabricado a partir de un orangután real de 230 Kilos y 1,80 metros. Las matemáticas nos permiten ver gracias a la geometría euclídea que el cambio de escala no es correcto. Según Euclídes; si dos figuras son proporcionales y a escala debe verificarse que el cociente de sus longitudes es un valor a, entonces, el cociente de sus áreas toma el valor de a^2, y el cociente de sus volúmenes es a^3. El factor a se llama factor de proporcionalidad. Si aplicamos esta regla a nuestro King-Kong obtenemos el siguiente resultado: altura del monstruo de la película/altura del gorila escogido=14,5/1,8 que es aproximadamente 8 entonces según el resultado de la geometría el cociente de los volúmenes tendría que ser 8 (al cubo) =515. Vemos que:

Volumen de nuestro King-Kong/volumen del gorila escogido=2900/230=12,6Kg este resultado muestra que nuestro King-Kong no está hecho según la escala. Si quisiéramos respetar las dadas de altura y volumen del gorila escogida, el gorila de la película tendría que pesar 120 T.

Un monstruo de estas características difícilmente podría ser ágil como para subir el Empire State. Ni si quiera podría haberse mantenido en pie, lo que verifica que la película King-Kong es pura ciencia-ficción. Como referencia hace falta decir que el Tyranosaurus Rex, que fue el animal bípedo más grande sobre la capa de la tierra, pesaba solamente 7T.

No es posible poner punto y final al repaso cinéfilo sin hablar del mítico filme *Superman*, héroe que vela por la humanidad parando balas con la mano, volando y corriendo a grandes velocidades. El cine lo atribuye a la diferencia de condiciones ambientales entre el planeta Kriptón (lugar de donde los poderes de Superman proceden) y la Tierra. Las matemáticas y la física pueden demostrarnos que Superman, aun teniendo poderes mágicos, es incapaz de parar un camión de 50000Kg con la mano sin recorrer una distancia retrógrada de por lo menos 25000 metros, la cual se obtiene mediante la segunda ley de Newton:

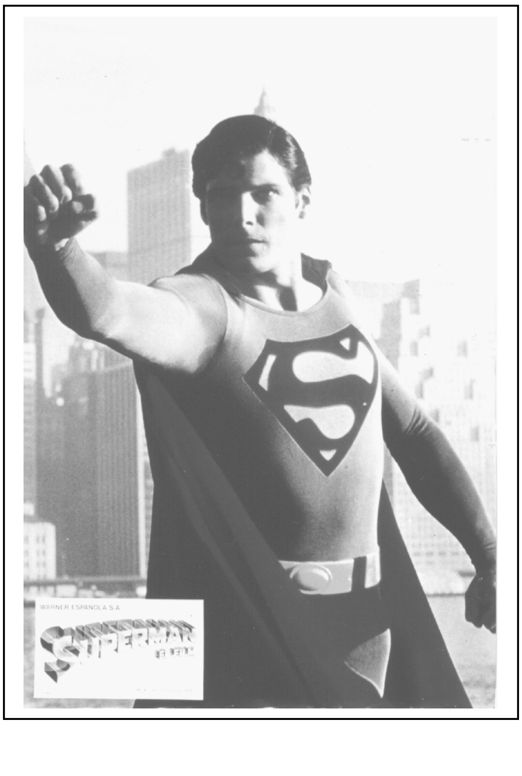
Fuerza = masa x aceleración =

90Kg (los que pesa Superman) x 9.81m/s2 = 883newtons

La aceleración de frenada sobre el camión = fuerza x masa, es de: 883newtons/50000Kg=0.018 m/s2

Según la física; distancia = (el cuadrado de la velocidad / doble de la aceleración) 30x30/(2x0.081)=25000 metros

En la película, en cambió Superman recorre solamente un metro.



Con todo ello podemos destacar algunos resultados puntuales:
Las matemáticas nos sirven para diferenciar lo que es manipulación de lo que es realidad. En cine las leyes de la naturaleza no son tratadas con suficiente rigor científico, lo que en muchas ocasiones confunde al espectador. Así pues debemos concluir que las matemáticas, la física y la técnica nos ofrecen las herramientas y conocimientos adecuados para seleccionar lo que puede y lo que no puede suceder fuera de la pantalla y nos dejan afirmar de esta manera que el séptimo arte nos engaña. Es importante, pues, que los espectadores tengamos una capacidad crítica para poder contrastar estos hechos y no dejarnos engañar por las maravillas del cine. Las matemáticas nos proporcionan criterios y herramientas que facilitan la comprensión con la finalidad de ser críticos y avanzados culturalmente.

A modo de conclusiones más generales podemos afirmar que las matemáticas tienen un papel relevante en el desarrollo técnico actual. Las matemáticas pueden ofrecer contenidos de interés y específicos a los estudiantes, mostrando esta "otra cara", coordinando el carácter formativo e informativo. Las matemáticas pueden contribuir a engrandecer la imaginación, la creatividad, las facultades críticas, el diálogo inteligente y una formación que está en consonancia con los últimos años de este milenio.

En síntesis se trata de favorecer la creatividad, motivar a los estudiantes y a los ciudadanos de cara a sus necesidades reales y cotidianas, y poner a su disposición un conjunto de recursos para comprender más ampliamente la utilidad y aplicaciones de los conceptos que nos han transmitido en nuestra formación y en definitiva como usar las técnicas aprendidas en un contexto real.

Capitulo III

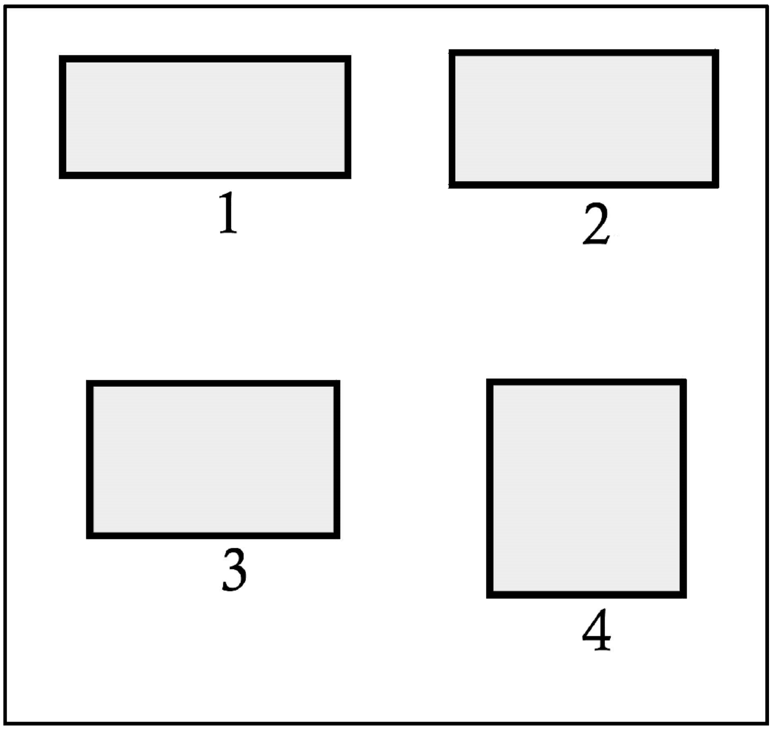
El número de oro: arte y naturaleza

"La geometría tiene dos tesoros, uno el Teorema de Pitágoras, el otro la Sección Áurea".
Kepler (1571-1630) astrónomo alemán.

El rectángulo áureo

Presentación

En cierta ocasión presenté a un grupo de estudiantes una colección de cuatro rectángulos con el objetivo de que eligieran el que les parecía más agradable, más hermoso. Presentamos en la ilustración los rectángulos mostrados.



Elección de rectángulos.

El resultado de la encuesta fue que una gran parte se decantó por el número 2. Pero, ¿qué tiene de especial ese rectángulo? Fijémonos en la longitud de sus lados: 5 cm x 3,09 cm. Su razón es:

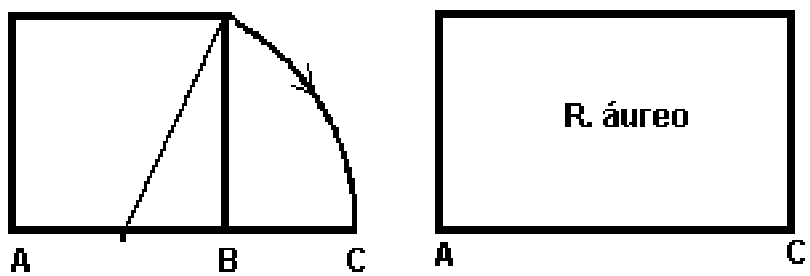
$$\frac{5}{3,09} = 1,618 = \Phi$$

A estos rectángulos cuya razón entre los lados es el número de oro se los llama rectángulos áureos. Como hemos comentado, el rectángulo áureo fue el que resultó mayoritariamente más atractivo. En diversos estadios de la naturaleza y el arte la presencia de las matemáticas ocupa un papel destacado. Éste es el caso del denominado *numero de oro*. Prestaremos atención a dicho número y a su influencia en la vida cotidiana.

Esta propiedad ha sido utilizada ampliamente a lo largo de la historia de la humanidad, desde los antiguos egipcios, griegos, romanos, en el románico, en el renacimiento y hasta incluso hoy en día, como veremos más adelante. En primer lugar mostraremos cómo se construye geométricamente el rectángulo áureo.

Construcción gráfica de un rectángulo áureo

Invitamos al lector a realizar el siguiente ejercicio: dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y traslademos esa distancia sobre el lado inicial (se obtiene AC), de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo.



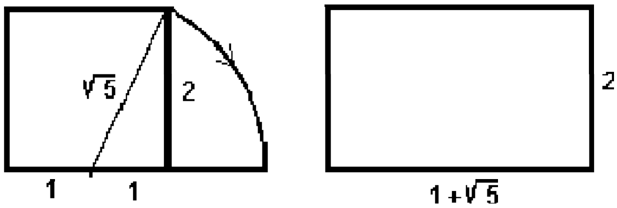
Construcción gráfica de un rectángulo áureo.

Si el lado del cuadrado vale 2 unidades, el lado mayor del rectángulo vale

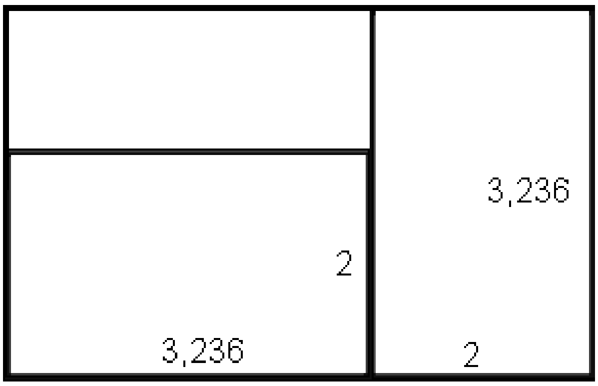
$1+\sqrt{5}$

por lo que la proporción entre los dos lados es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Otra propiedad de este rectángulo es que si se colocan dos iguales como en la figura siguiente, se forma otro rectángulo áureo más grande.



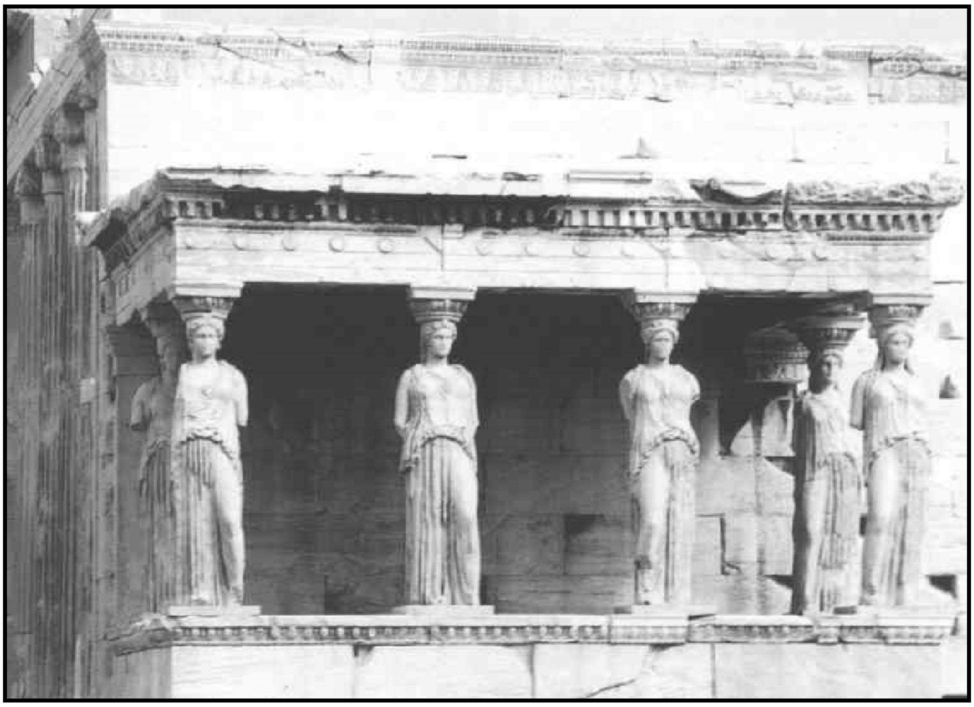
Composición de rectángulos áureos.

Con estos dos rectángulos de 3,236 x 2 formamos otro de 5,236 x 3,236.

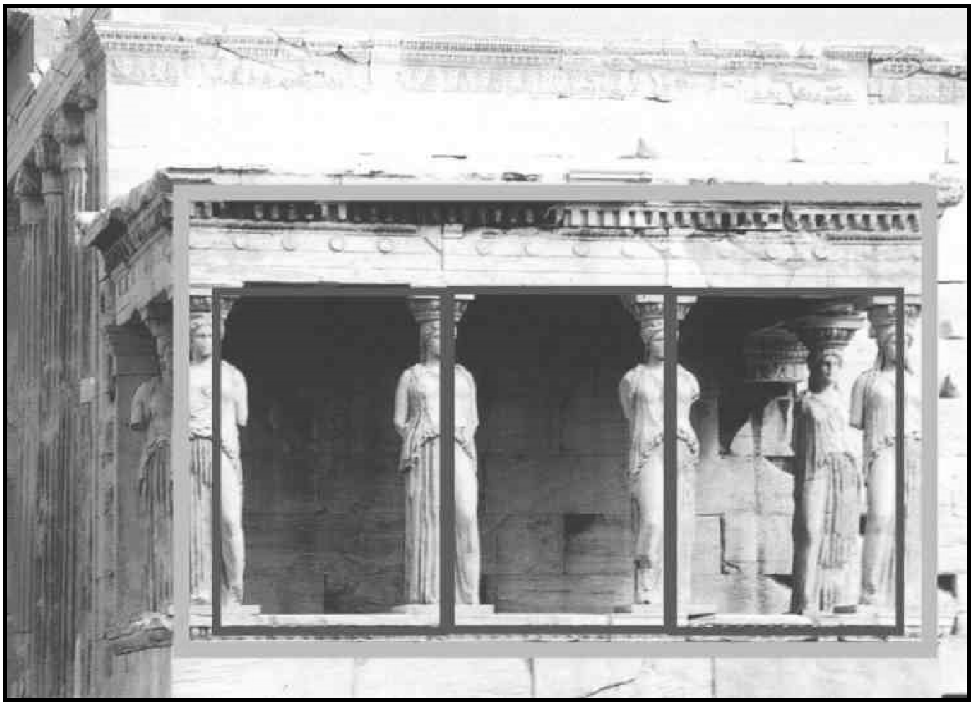
$$\frac{3{,}236}{2} = \frac{5{,}236}{3{,}236} = 1{,}618 = \Phi$$

El rectángulo áureo en el arte

Posiblemente por esa atracción intrínseca que se siente por las proporciones del rectángulo áureo éste ha sido ampliamente utilizado como cualquier otro método de hacer atractiva una obra como las formas, el color, la luz, etc. Está presente en todas las épocas y todas las disciplinas. Puede encontrarse en la pintura, la escultura, la arquitectura, en obras desconocidas y en otras famosas. Desde las pirámides, La Gioconda, El Nacimiento de Venus, La Venus de Milo, La catedral de Notre Dame. Veamos algunos ejemplos:



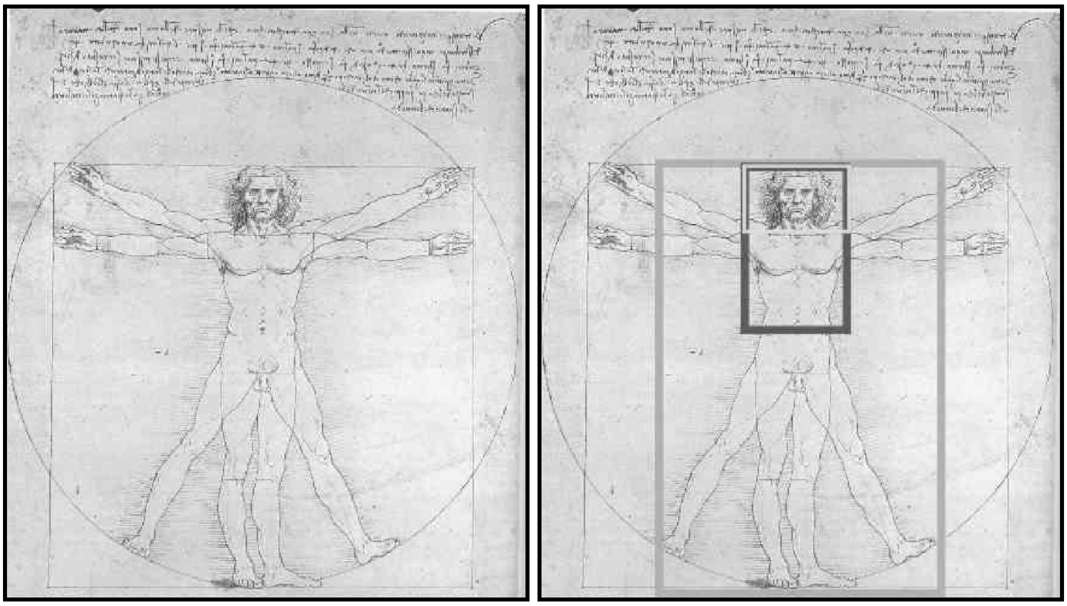
Pórtico de las Cariátides, en el lado sur del Erecteión.



Vemos en el Pórtico de las Cariátides, en el lado sur del Erecteión, que las columnas de las Cariátides forman los lados de rectángulos áureos. A su vez la fachada es otro de estos rectángulos.

Partenón de Atenas.

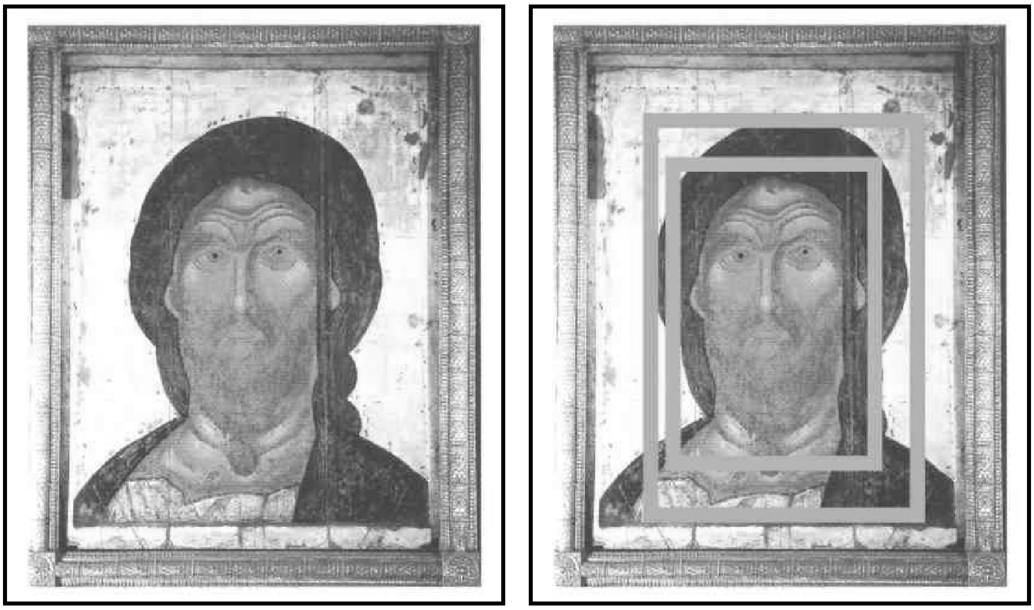
Igual que con las Cariátides el Partenón, Acrópolis de Atenas (447-438 a.C.) los presenta en diversos elementos arquitectónicos..



El hombre de Vitruvio, de Leonardo da Vinci.

El hombre según las proporciones de Vitruvio (1490) (Galería de la Academia, Venecia) por Leonardo da Vinci. Este dibujo que muestra las proporciones de la figura humana está basado en un pasaje del famoso arquitecto romano, Vitruvio, en el cual describe cómo la forma humana vista de frente con las manos y los pies extendidos, puede inscribirse en una circunferencia que tenga como centro el ombligo. Sugiere, además, que la figura puede encerrarse dentro de un cuadrado. Se calcula que la cabeza es exactamente un décimo del total. Construido de tal manera la relación entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia es el número de oro.

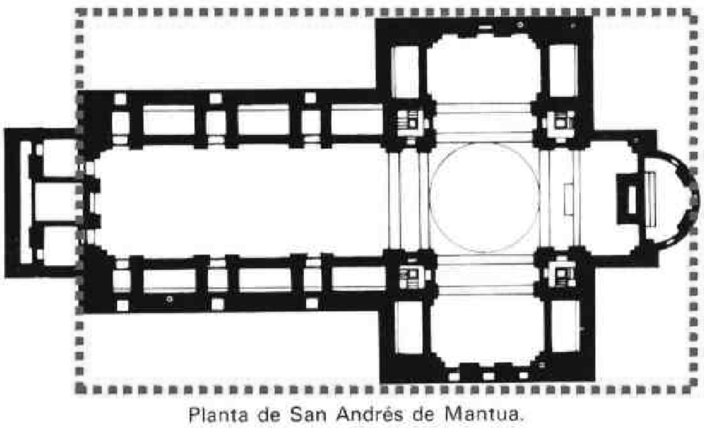
Retrato, de El Greco.



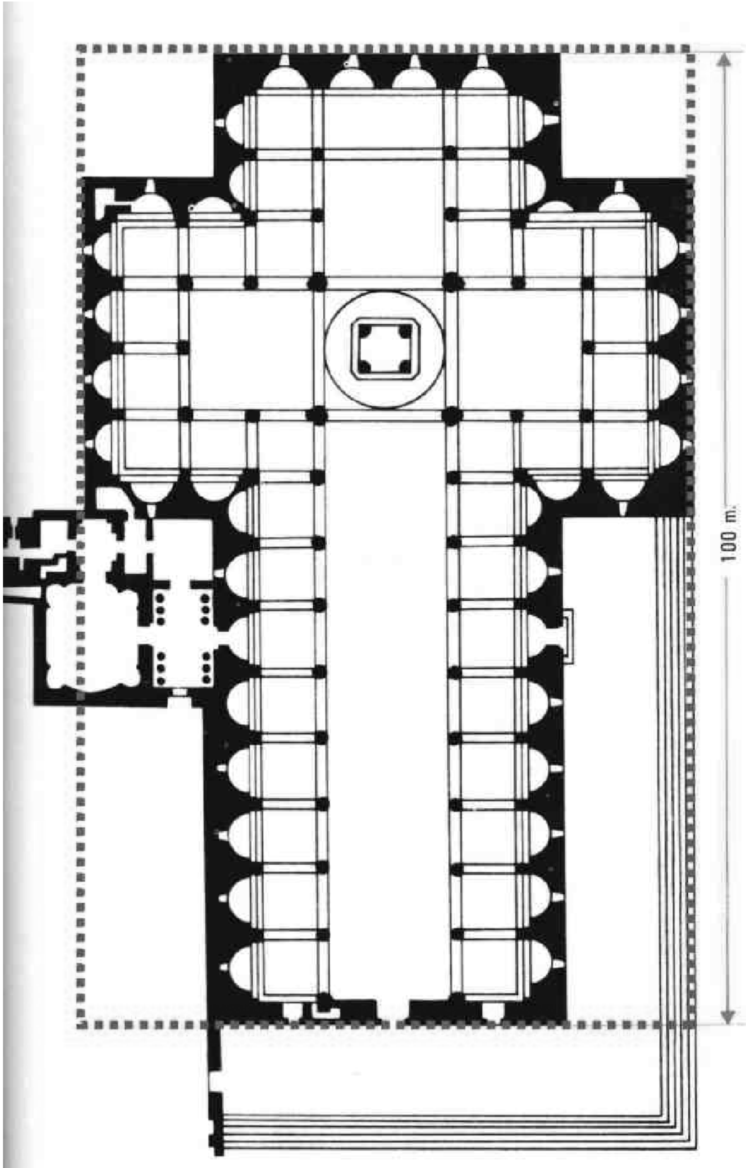
Cristo en un icono ruso del siglo XIV.

Icono ruso "La Virgen de Vladimir", siglo XII.

Ídolo de la perla, de Gauguín.



Planta de San Andrés de Mantua.



Planta de la Iglesia del Santo Spirito (Florencia).

Planta de la Iglesia del Santo Spirito (Florencia).

El rectángulo áureo en la actualidad

En una sociedad como la actual, centrada en el materialismo y la productividad, parece absurdo pensar que una figura como el rectángulo de oro pueda situarse en otro lugar que no sea en museos o exposiciones. Sin embargo, nada más lejos de la realidad. Estamos rodeados de rectángulos áureos. ¿Por qué muchos deportes se practican en campos rectangulares? Podrían ser circulares, además así el público podría situarse mejor ya que no habría las incomodas butacas de la esquina. ¡Notemos que son rectangulares! Por supuesto las medidas varían mucho de un deporte a otro ya que también dependen del número de jugadores y de su disposición en el campo. Para fijar ideas, un campo de fútbol es rectangular. En este caso la normativa FIFA (órgano internacional rector del fútbol) establece las medidas mínimas y máximas que deben tener un campo y son:

mínimas: 90m x 45m

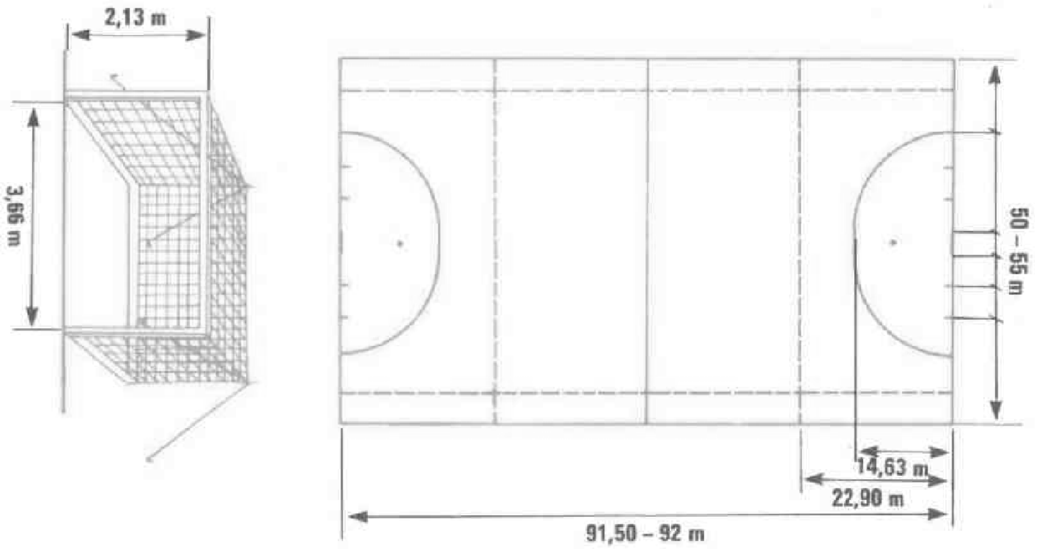
máximas: 120m x 90m

Sus proporciones serían en estos casos:

90 / 45 = 2

120 / 90 = 1,3

Las personas de mente despierta se habrán dado cuenta que ninguna de estas proporciones se parece más que remotamente a un rectángulo de oro. Sin embargo tampoco se pueden ver campos de 90 x 45 ni de 120 x 90. Si elegimos un campo de medidas intermedias que suelen ser los más usuales, es decir, 115 x 68 su proporción es de 1,69. ¡Esto ya es otra cosa! En síntesis: *la mayoría de campos de fútbol verifican la proporción áurea*.



Dimensiones de un campo de hockey.

En el mismo caso tenemos los campos de rugby, baloncesto, hockey, etc. Todos ellos, aparte del atractivo del deporte, tienen el atractivo del escenario donde se desarrollan: son todos rectángulos áureos. Los ciudadanos se sienten cómodos con estas dimensiones.

Veamos otro ejemplo. Si es usted fumador puede decir, sin temor a equivocarse, que está poseído por el "vicio áureo". Mida su cajetilla de tabaco... Efectivamente proporciones áureas perfectas. De hecho una cajetilla de tabaco es un diseño perfecto para inducir al consumo de tabaco. Su forma, como hemos comentado, es atractiva a la vista, pero también al tacto, su forma se acomoda al tamaño de una mano. También cabe perfectamente en un bolsillo de tamaño normal, y eso por no hablar de su contenido, con sustancias que crean adicción. Es el resultado perfecto de la más sofisticada técnica de ingeniería de ventas. He aquí como el conocimiento y la belleza puede utilizarse también para fines diabólicos.

Cajetillas de tabaco.

Sin embargo puede ser que usted no sea partidario de espectáculos superficiales y frívolos como los partidos de fútbol, o sea de la liga antitabaco. Pues no está de suerte ya que también lleva usted un rectángulo áureo en el bolsillo, y si no se lo cree, mire sus tarjetas de crédito, ejemplos de rectángulos de oro tan agradables en su tamaño y forma.

Aquí es cuando siempre alguien sonríe: ni me gustan los deportes, ni fumo ni tengo tarjetas de crédito. ¡Pues una vez más mala suerte! Mírese de todas formas la cartera y extraiga su documentación. Mida y se sorprenderá: ¡¡¡aparece la proporción áurea !!!.

Documento de identidad utilizado en el Estado Español

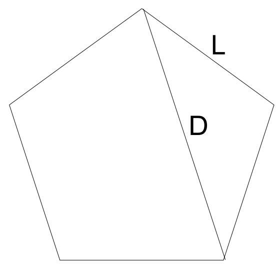
Podríamos decir que los rectángulos áureos están por todas partes: televisores panorámicos, edificios, como por ejemplo el de las Naciones Unidas, tabletas de chocolate, etc. Busquen y midan.

Obtención y caracterizaciones

Esta sección está pensada *en apología* a los amantes de las matemáticas, el lector no iniciado puede proseguir la lectura sin necesidad de leer este apartado.

Bien conocida es la importante contribución que realizaron los antiguos griegos a matemáticas. Teoremas, axiomas y multitud de conceptos fueron el legado de ese pueblo, algunos de ellos tan verdaderamente curiosos como aparentemente inútiles... ¿O no? A pesar de que el concepto ya se conocía mucho antes vamos a referirnos a algunas de estas curiosidades en las que se fijaron. En este apartado les presentaremos el denominado número de oro desde un punto de vista matemático. Pueden realizar el ejercicio intelectual siguiente:

"Dado un pentágono regular dividiremos la longitud de una cualquiera de sus diagonales (D) entre la longitud de uno de sus lados (L). Sea cual sea el tamaño del pentágono el valor del cociente es siempre 1,61803. Este fascinante número, denotado Φ (Phi), se denomina número de oro".



$$\boxed{\frac{L}{D} = 1{,}61803 = \Phi}$$

Ilustración . Phi en el pentágono.

La presencia de este maravilloso número se encuentra también en la estrella regular de cinco puntas (pentagrama).

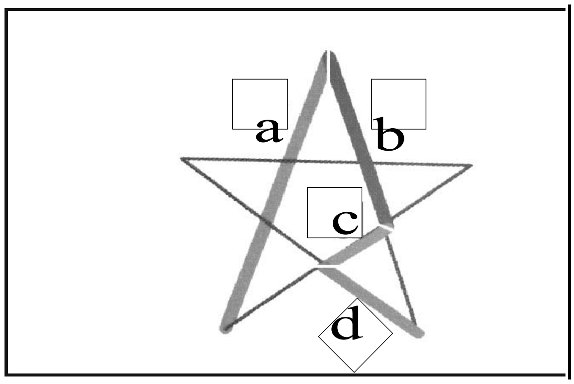


Ilustración . Phi el pentagrama.

En primer lugar destacaremos la belleza de sus propiedades matemáticas. En el se cumplen las siguientes igualdades:

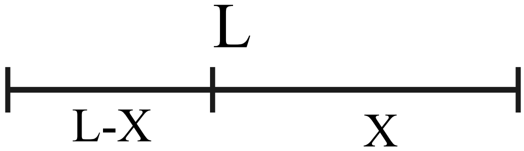
$$c + d = b$$

$$c + b = a$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \Phi$$

Relaciones en un pentagrama.

Supongamos ahora que tenemos un segmento de longitud L. Lo dividimos en dos partes, llamemos X al lado mayor y L-X al menor. Si dividimos el total de la longitud del segmento entre la porción mayor, y después dividimos el segmento mayor X entre el menor L-X veremos que para cualquier valor de L y de X los dos cocientes son diferentes salvo en un caso, cuando $X = 1{,}618\ (\Phi)$ y $L = \Phi + 1$



$$\frac{L}{X} \neq \frac{X}{L-X}$$

Si X = Φ y L - X = 1 con lo que L = Φ + 1 entonces:

$$\frac{L}{\Phi} = \frac{1+1{,}618}{1{,}618} = \frac{\Phi}{1} = \Phi$$

Expresado de otra manera:

$$\frac{X+1}{X} = \frac{X}{1}$$

$$X^2 = X + 1$$

$$X^2 - X - 1 = 0$$

Si calculamos las soluciones de esta ecuación nos queda:

$$X_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}61803$$

$$\boxed{X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803 = \Phi}$$

Expresión. Forma de Phi.

De estas dos soluciones prestaremos atención a la segunda de ellas, es decir al número de oro; ya que posee una extraordinaria influencia en la vida cotidiana.
Fijémonos: si además de figuras planas hablamos de volúmenes aparece uno muy curioso, el del dodecaedro:

$$\boxed{Volumen = \frac{1}{2}\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 \cdot a^3}$$

Volumen del dodecaedro de arista "a".

Vemos que aparece claramente la expresión del número de oro.

El estudio del número de oro le dotó de numerosas caracterizaciones, entre las que cabe señalar las siguientes, en las que aparece únicamente el número 1:

$$\boxed{\Phi = \lim \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}$$

Caracterización de Phi con límites.

$$\boxed{\Phi = 1 + \lim \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}$$

Forma de Phi con límites.

O como función trigonométrica:

$$\boxed{\Phi = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

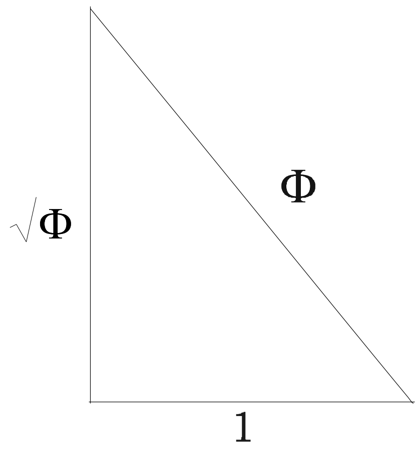
Forma trigonométrica de Phi.

También se pude expresar como límite de una sucesión recurrente:

$$\boxed{X_n = \frac{X_{n-1}^2 + 1}{2 \cdot X_{n-1} - 1}}$$

Forma iterativa de Phi.

W.A.Price en una carta publicada en la revista inglesa The Field asegura que de la misma manera que sólo puede formarse un triángulo cuyos lados formen una progresión aritmética 3, 4 y 5, y sus semejantes, también existe un único triángulo cuyos lados forman una progresión geométrica y es el triángulo rectángulo de lados 1, $\sqrt{\Phi}$ y Φ. Este es el llamado triángulo de Price.

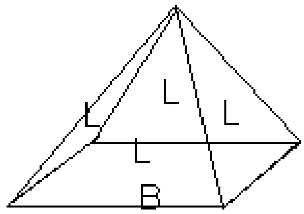


Triángulo de Price.

El número de oro en la historia

En las antiguas civilizaciones, encontramos ampliamente la presencia de la relación áurea. La cámara de oro que contenía la tumba de Ramsés IV tiene base cuadrada y altura en proporción áurea respecto al lado de la base. El templo de Osiris en Abydos tenía un rectángulo áureo como planta. Las pirámides, en cuya geometría se ocultan conocimientos de matemáticas, física, astronomía y otros campos poseen múltiples lugares en los que aparece claramente el número de oro. Por ejemplo, en la pirámide de Keops, el área total de la Gran Pirámide está dividida según la sección áurea de tal manera que la razón del área total a la lateral es igual a la razón entre esta última y el área de la base.

Gráficamente:

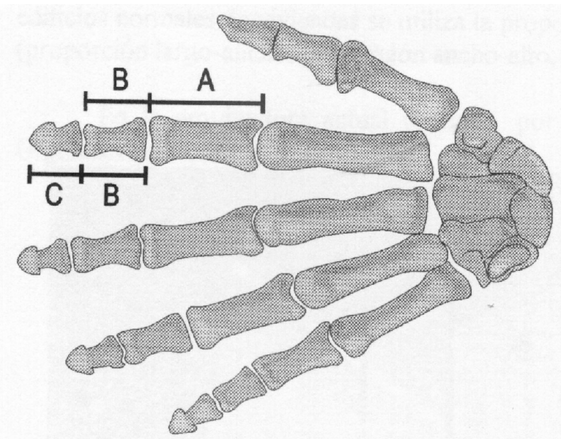


$$\boxed{\frac{B+4\cdot L}{4\cdot L}=\frac{4\cdot L}{B}=\Phi}$$

La razón áurea

La razón áurea y la fisiología humana: las proporciones áureas en el cuerpo humano

Hasta ahora hemos visto cómo el número de oro está presente en la sociedad y la cultura humana. Sin embargo esta presencia es artificial, la hemos impuesto los ciudadanos. A pesar de ello, en realidad, estamos ligados a él de forma natural, es decir, que desde que nacemos nuestra vida corre paralela al número áureo.
Zeysing, famoso investigador del número de oro, efectuó medidas en numerosos cuerpos humanos y llegó a interesantes conclusiones. Entre ellas comprueba que las proporciones del cuerpo masculino se acercan a 13/8 y las del cuerpo femenino a 8/5, siendo las dos proporciones cercanas al número de oro y los términos de ellas (13, 8 y 5) números de la denominada serie de Fibonacci, la cual estudiaremos más adelante. También encontró que durante el crecimiento humano estas proporciones se van aproximando al valor de Φ.
Observó que el ombligo divide el cuerpo humano en dos segmentos que respecto a la altura poseen la proporción áurea.
Podríamos citar numerosos ejemplos de la presencia de la proporción Φ en nuestro cuerpo. Uno de ellos es el representado en la siguiente figura:



$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \Phi$$

Proporciones áureas de la mano

Como podemos observar la proporción de la longitud de tres de las falanges de la mano expresadas como en la figura nos dan nuevamente Φ.

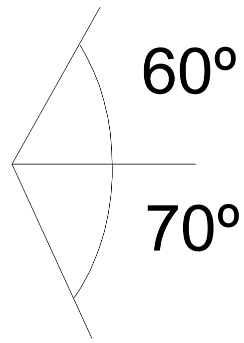
La razón áurea y la visión

Al inicio del capítulo hemos mostrado la preferencia humana por el rectángulo áureo frente a otros de otras proporciones. Afirmábamos que es un hecho demostrado que esas superficies tienen un atractivo especial, tal como hemos visto en los numerosos ejemplos presentados. Después de todo lo dicho hasta ahora surge una pregunta. Pero, ¿por qué ocurre este fenómeno?.

No pretenderemos dar respuesta a esta pregunta, pero sí que mostraremos algunas curiosidades que creemos interesantes en relación con esta percepción.

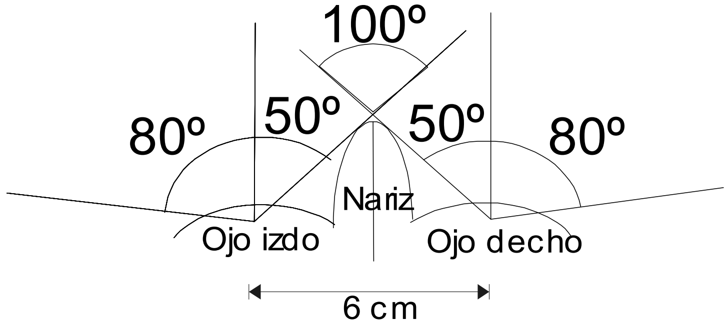
En la relación con nuestro entorno tendemos a preferir todo aquello que percibimos con claridad pero que no sea agresivo a nuestros sentidos. No nos gustan los sabores u olores demasiado intensos y si son muy débiles no los notamos. Nos atrae la música preferentemente a un nivel audible pero sin estridencias, sin excesiva riqueza de agudos o graves. En una conversación estamos incómodos si nuestro interlocutor habla muy bajo, o por el contrario demasiado alto. Si está demasiado lejos nos obliga a subir demasiado la voz, lo que nos cansa y no nos gusta, pero si está demasiado cerca nos incomoda, ocupa lo que se llama nuestro "espacio vital". Para hablar con él acostumbramos a situarnos a una distancia intermedia, a nuestro alcance pero sin excesiva proximidad y mirándole a la cara, sin mirar fijamente ni mirar hacia otro lado. Todas estas consideraciones son fruto de las costumbre sociales, pero también de nuestra constitución fisiológica. Hablar con una persona a la que no miras o está demasiado cerca hace que perdamos aspectos de la conversación que a veces sólo captamos inconscientemente como son ligeros y sutiles movimientos faciales o del resto del cuerpo. Acostumbramos a colocar su posición en el centro de nuestro campo visual. Con todo esto veamos unas pinceladas de anatomía.

Campo de visión vertical del ojo humano



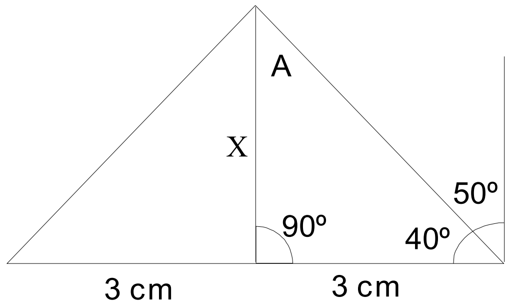
Verticalmente los ojos tienen una apertura angular de 60º por arriba y 70º por debajo de la horizontal del ojo.

Campo de visión horizontal del ojo humano



Asimismo, horizontalmente, respecto a la frontal de cada ojo tienen una apertura lateral exterior de 80º e interior (el lado de la nariz) de 50º. Este hecho provoca que una zona de 100º sea la que dominan ambos ojos simultáneamente. La distancia media entre los ojos es de 6 cm. Todos estos datos son, por supuesto, una media en la población occidental, puesto que hay multitud de individuos cuyas medidas difieren sensiblemente de esta media, y respecto a otras razas también varían las medidas.

Con estos datos vamos a realizar algunos cálculos.



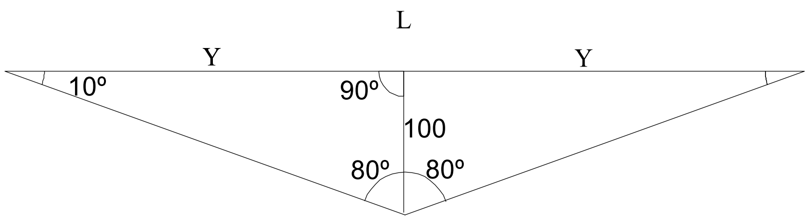
Del triángulo formado por los dos ojos y el punto de origen de la intersección del campo visual de los dos ojos hemos de averiguar x y A. Sabemos que la suma de ángulos de un triangulo es de 180º, con ello podemos establecer:

$$A = 180 - (90 + 40) = 50^{\circ}$$

que con la ayuda del teorema del seno se obtiene:

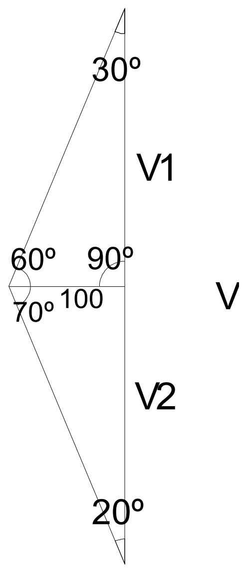
$$\frac{x}{\sin 40} = \frac{3}{\sin 50} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot \sin 40}{\sin 50} = 2{,}5cm$$

Ahora averiguaremos las proporciones de una superficie plana situada delante de nuestros ojos. Para minimizar el efecto de la separación entre los ojos y poderlos considerar como un solo punto situaremos la superficie a una distancia sensiblemente mayor que los 6 cm de separación entre ellos, por ejemplo 1 metro (100 cm).



$$\frac{y}{\sin 80} = \frac{100}{\sin 10} \Rightarrow y = 567{,}1$$

L = 2.Y = 1.134,2 cm



$$\frac{V1}{\sin 60} = \frac{100}{\sin 30} \Rightarrow V1 = 173{,}2 \text{ cm}$$

$$\frac{V2}{\sin 70} = \frac{100}{\sin 20} \Rightarrow V1 = 274{,}7 \text{ cm}$$

V = V1 + V2 = 173,2 + 274,7 = 447.9 cm

$$\text{Razón} = \frac{1134{,}2}{447.9} = 2{,}532$$

Hasta aquí esto no presenta nada interesante para el tema que nos ocupa. Los ángulos verticales son inferiores al horizontal exterior debido a las limitaciones visuales que impone la zona ósea de las cuencas de los ojos , igual que el ángulo horizontal interior viene limitado por la nariz. Esto quiere decir que en el límite de visión de estos ángulos la visión es aceptablemente buena, cosa que no ocurre con el ángulo horizontal externo (80 grados) donde en el límite la visión no es buena ya que entra en lo que se conoce como visión periférica, es decir, vemos formas aproximadas, pero no podemos detallar bien la forma exacta, y sólo el color vagamente.

Esto es debido a que la posición de los sensores ópticos, los conos y bastoncitos, no está distribuida uniformemente por toda la zona de visión. Por este motivo si en lugar de escoger 80 grados escogemos un ángulo un poco menor tendremos una zona en la que la visión es más uniforme, es decir, que se perciben los objetos más correctamente. Así por ejemplo tomaremos un ángulo de 75 grados en lugar de los 80 grados anteriores.

En este caso tendremos:

$$\frac{y}{\sin 75} = \frac{100}{\sin 15} \Rightarrow y = 373{,}2$$

L = 2.Y = 746,4 cm

V = 447.9 cm

$$\text{Razón} = \frac{746{,}4}{447.9} = 1{,}66$$

¡Esta medida nos resulta algo familiar !

Con ello podemos afirmar que la zona en la que la visión humana es más cómoda tiene proporciones muy aproximadas a las áureas. Todo ello son de hecho medias, lo más asombroso es el hecho de que un rectángulo áureo se adapta bastante exactamente a la zona de una visión cómoda en el ser humano.

Sin embargo hay más. Sabemos que la zona de estereovisión, es decir, la zona de dominio simultáneo de los dos ojos abarca un ángulo de 100 grados. Con este ángulo calculemos la razón de esa zona de visión.

Un ángulo central de 100º sería como calcular, de la forma que hemos hecho hasta ahora, un ángulo lateral de 50º.

$$\frac{Y}{\sin 50} = \frac{100}{\sin 40} \Rightarrow Y = 119{,}2$$

$L = 2.Y = 238{,}3$ cm

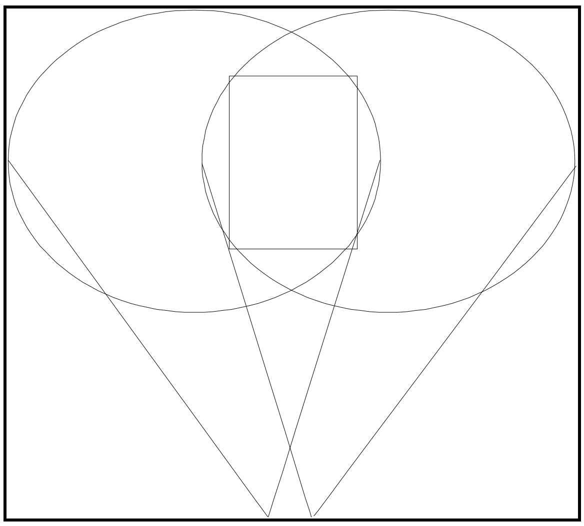
$V = 447.9$ cm

$$\text{Razón} = \frac{238{,}5}{447.9} = 0{,}53$$

Lo cual no es nada significativo. Sin embargo si calculamos la inversa de 0,53, es decir hallando el cociente entre la longitud mayor y la menor, se obtiene:

$$\text{Razón} = \frac{447{,}9}{238{,}5} = 1{,}87$$

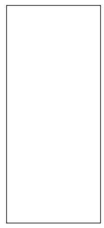
Nos damos cuenta que también se ajusta bastante bien a una zona de proporciones áureas, aunque en este caso la zona tiene una componente vertical mayor a la horizontal.



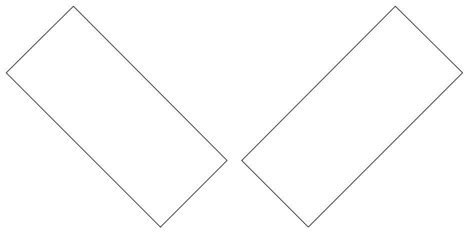
Zonas de visión de los ojos.

Con todo lo anteriormente dicho quizás podamos explicar un hecho realmente curioso. Si pedimos a cualquier persona que nos dibuje un rectángulo, en la gran mayoría de los casos nos lo dibujará con el lado mayor horizontal.

Pocas personas lo harán con el lado menor horizontal.



Y muy pocas personas lo harían inclinado.



Sin embargo tan rectángulo es el primero, como el segundo, como los terceros; y por este motivo de entre dos rectángulos áureos, uno de ellos colocado horizontal, y el otro vertical, la mayor parte de las personas escogen el horizontal. No se puede decir que el horizontal sea más áureo que el vertical, ya que al margen de la rotación de 90 grados, son idénticos. Sin embargo este fenómeno nos ilustra como el hecho de que tengamos los ojos uno al lado del otro horizontalmente y la existencia de la visión periférica hace que sea tan importante para nosotros una superficie que se acomode a nuestro espacio visual de una manera tan proporcional a como observamos nuestro entorno.

La aportación de Fibonacci

Introducción

Esta sección complementa el actual capítulo para ofrecer una mayor visión formal del número de oro y la razón áurea, con el fin de ampliar el tema. El lector no iniciado puede pasar al siguiente capítulo sin perder generalidad.

Leonardo Bonacci (1170-1240), matemático italiano al que llamaban Leonardo de Pisa o Leonardo Pisano por ser originario de Pisa, paso a la posteridad como Fibonacci, es decir, hijo de Bonacci. Al ser su padre representante comercial de la ciudad de Pisa en Argelia, estuvo en contacto con la cultura árabe, interesándose especialmente por sus matemáticas. Difundió por occidente los caracteres árabes y publicó la obra quizá más importante del álgebra medieval, el *Liber abbaci* (o Libro acerca del Ábaco), donde trataba diversos problemas algebraicos aplicados a la resolución de problemas comerciales. También exponía entre otras cosas, la importancia del sistema de numeración indoarábigo. Escrito en 1202, sólo se conserva la versión de 1228 (segunda versión).

En él aparece (Págs. 123 y 124) un problema sobre el nacimiento de conejos que nada tuvo de significativo hasta que, a comienzos del siglo pasado, fue objeto de numerosos estudios que permitieron descubrir muchas de las propiedades que tiene, aunque anteriormente Kepler (De Nive Sexangula) ya había relacionado la llamada sucesión de Fibonacci con la sección áurea y el crecimiento de plantas.

Uno de sus desarrollos fue una sucesión de números a la cual se la conoce como “serie de Fibonacci”, que veremos a continuación.

La serie de Fibonacci

La llamada serie de Fibonacci consiste en un sucesión infinita de números cuyos dos primeros elementos son “1” y que tiene la particularidad de que cada nuevo término se obtiene con la suma de los dos anteriores:

$$\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...$$

El término general de esta sucesión es:

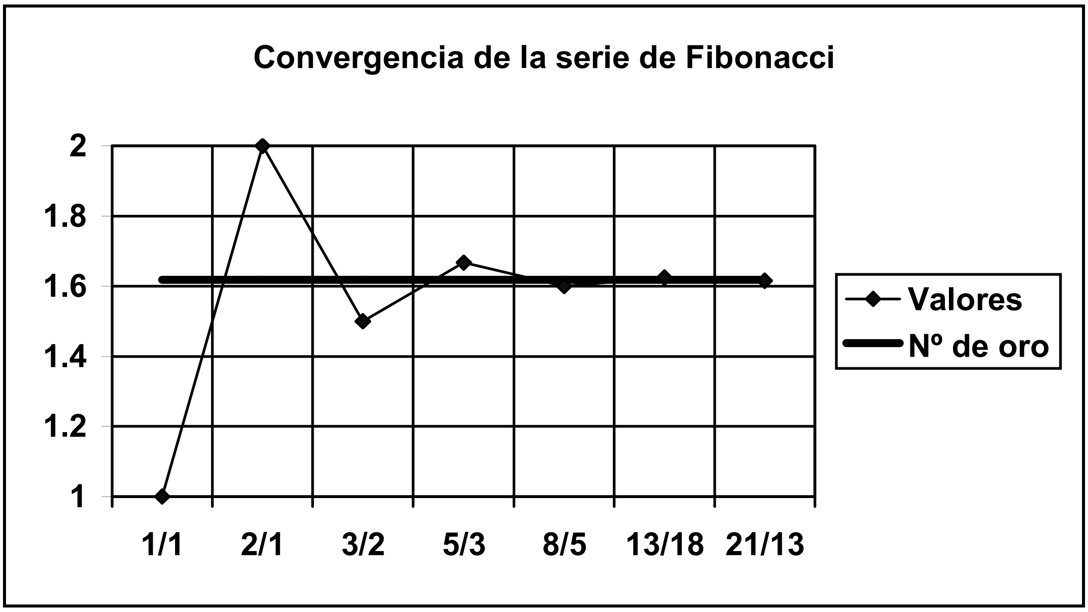
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Término n de la sucesión de Fibonacci.

Como puede verse la expresión del número de oro está presente: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Si formamos otra serie en la que cada término sea el cociente entre un término se la serie de Fibonacci y el anterior, esta nueva serie tiende hacia el número de oro (1.618...):

(1/1) 1, (2/1) 2, (3/2) 1.5, (5/3) 1.667, (8/5) 1.60, (13/8) 1.625, (21/13) 1.615, ...



Tabla

Sin embargo esto no queda así, porque si formamos más series en las que se cumpla la condición de que cada término sea la suma de los dos anteriores podemos ver que también cumplen que el cociente de cada término por el anterior tiende al número de oro.

p.e. **3**, **6**, 9, 15, 24, 39, 63, 102

(6/2) 3, (9/6) 1.5, (15/9) 1.667,(24/15) 1.6, (39/24) 1.625, (63/39) 1.615, (102/63) 1.619

p.e. **1**, **8**, 9, 17, 26, 43, 69, 112

(8/1) 8, (9/8) 1.125, (17/9) 1.889, (26/17) 1.529, (43/26) 1.654, (69/43) 1.605, (112/69) 1.623

p.e. 1’5, **2’3**, 3’8, 6’1, 9’9, 16, 25’9, 41’9

(2.3/1.5) 0.652, (3.8/2.3) 1.652, (6.1/3.8) 1.605, (9.9/6.1) 1.623, (16/9.9) 1,616, (25.9/16) 1.619, (41.9/25.9) 1.618

Así podríamos seguir y veríamos cómo para cualquier par de números se obtendría una sucesión cuya serie de cocientes asociada tiende hacia el número de oro (recordemos 1.618).

Otras convergencias de los números de Fibonacci :

La sucesión:

$f\,1 / f\,3,\quad f\,2 / f\,4,\quad f\,3 / f\,5,\quad f\,4 / f\,6,\quad \ldots f\,n / f\,n+2$

converge a $\Phi^2 = 2.618$

También se puede comprobar que la diferencia de cuadrados de dos números de Fibonacci cuyos índices difieren en dos unidades es otro número de Fibonacci.

p.e.

a4= 3   a6= 8   64-9= 55= a10

a5=5   a7=13   169-25= 144= a12

Igual que las anteriores se puede formar otra serie en la que cada término sea la suma de los tres anteriores:

1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57 ...

a esta serie se la llama "Sucesión de tribonacci".
Para terminar con las series veamos estas tres relacionadas con el número de oro en la que podemos comprobar las especiales cualidades matemáticas de este número.

Φ^n	A
1	*1*
Φ	Φ
Φ^2	$\Phi+1$
Φ^3	$2\Phi+1$
Φ^4	$3\Phi+2$
Φ^5	$5\Phi+3$
Φ^6	$8\Phi+5$
Φ^7	$13\Phi+8$
...	...

Tabla

La primera columna es una serie formada por las potencias sucesivas del número de oro. La tercera, al igual que la serie de Fibonacci, por la suma de los dos términos anteriores, siendo los dos primeros 1 y Φ.

Los conejos y Fibonacci

Fibonacci, en su obra "Liber abbaci", plantea un problema curioso:
"En un patio cerrado, se coloca una pareja de conejos para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y se supone que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva. Como la primera pareja de conejos tiene descendencia en el primer mes, dobla el número y, en este mes, se tienen dos parejas. De éstas, una pareja, la primera, también tiene descendencia en el mes siguiente, de manera que en el segundo mes hay tres parejas. De ésas, dos parejas tienen descendencia en el mes siguiente, de modo que en el tercer mes han nacido dos parejas adicionales de conejos, y el número total de parejas de conejos llega a cinco. En dicho mes tres de estas cinco parejas tienen hijos y, en el cuarto, el número de parejas llega a 8. Cinco de estas parejas producen otras cinco parejas, las cuales, junto con las 8 parejas ya existentes, hacen 13 parejas en el quinto mes.

Cinco de estas parejas no tienen hijos en este mes, mientras que las restantes ocho parejas tienen descendencia, de modo que en el sexto mes se tienen 21 parejas. Sumando a éstas las 13 parejas que nacen en el séptimo mes, se obtiene un total de 34 parejas. Sumando a éstas las 21 parejas que nacen en el octavo mes, el total es de 55 parejas. Sumando a éstas las 34 parejas que nacen en el noveno mes, se obtienen 89 parejas. Agregando a éstas las 55 parejas que nacen en el décimo mes, se tiene un total de 144 parejas. Agregando a éstas las 89 parejas que nacen en el undécimo mes, se llega a un total de 233 parejas.

Mes	Nº parejas
Inicial	1
1º	2
2º	3
3º	5
4º	8
5º	13
6º	21
7º	34
8º	55
9º	89
10º	144
11º	233
12º	377

Tabla

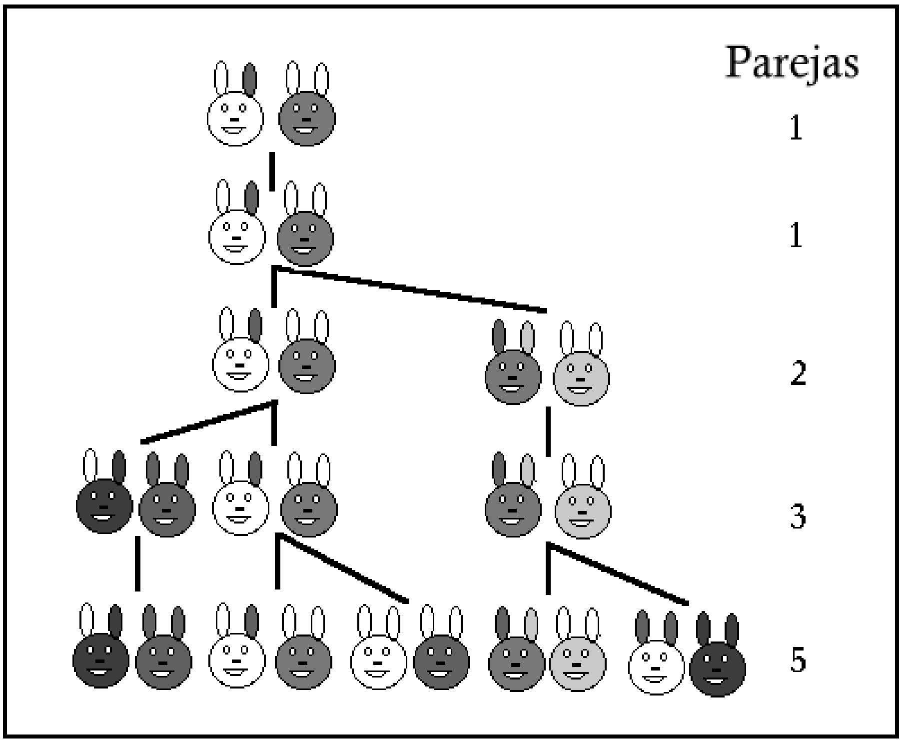


Ilustración: Conejos de Fibinacci.

Finalmente, sumando a éstas 144 parejas que nacen en el último mes, se obtienen un total de 377 parejas. Éste es el número de parejas producidas por la primera pareja en el lugar dado, al término de un año. Al examinar la tabla anterior, se puede ver cómo llegar a este resultado. A saber: se suma el primer número al segundo, o sea, 1 a 2; el segundo al tercero; el tercero al cuarto, el cuarto al quinto; y así sucesivamente, hasta que se suman el décimo y el undécimo números 144 y 233; así se obtiene el número total de parejas de los conejos en cuestión, es decir, 377.

Como puede apreciarse todos los números así obtenidos son términos de la serie de Fibonacci.

La serie de Fibonacci y el número de oro en la naturaleza

A pesar de la apariencia totalmente artificial de las series de Fibonacci, nos las podemos encontrar en la naturaleza que nos rodea. Fíjense, por ejemplo, en los pétalos de las flores. ¿Se han dado cuenta de la gran cantidad de ellas que tienen un número de pétalos igual a uno de los números de dicha serie?

Las siguientes fotografías nos muestran pétalos de geranio así como sus hojas, los sépalos de una rosa antes de florecer, y podemos pensar en muchos otros casos, como los tréboles, buganvillas, margaritas y tantas otras.

Ilustración : Flor del geranio y sépalos de rosa.

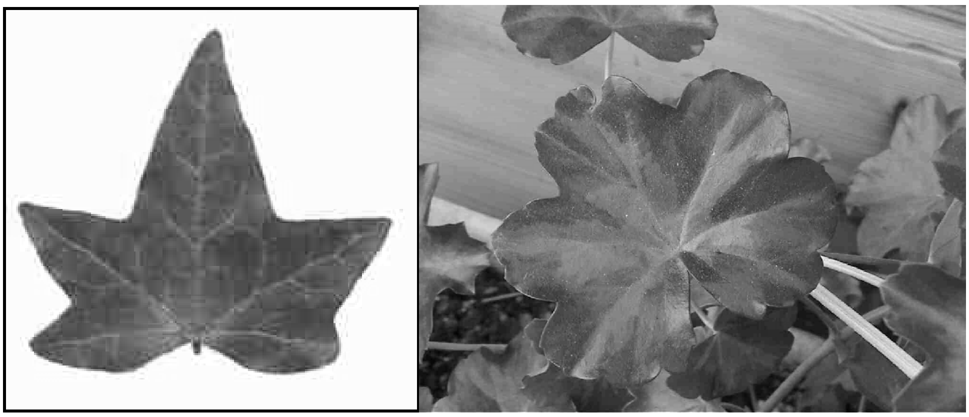


Ilustración: Hojas pentalobulares.

Otro lugar donde la podemos encontrar las series de Fibonacci es en los espirales que forman las escamas de las piñas de las coníferas o de plantas tropicales, o las que forman las semillas de plantas como los girasoles.

Para entender dónde aparecen hay que ponerlas con la zona de unión a la rama hacia arriba. En esta posición se verá claramente que las escamas están formando espirales. En realidad forman dos tipos simultáneamente, un tipo en sentido horario y otro en sentido antihorario. Curiosamente, el número de espirales en un sentido y en otro es diferente, pero los dos pertenecen a la serie de Fibonacci.

En la imagen inferior aparece representada una piña con ocho espirales en sentido horario (en verde) y trece en sentido antihorario (en rojo). Ocho y trece, dos números consecutivos de la serie de Fibonacci.

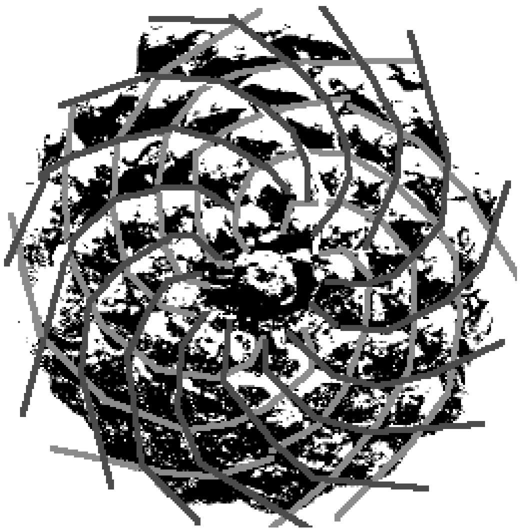


Ilustración: Disposición de las espirales en una piña.

Y ahora veamos un caso real como los que podemos ver en cualquiera de nuestros bosques de coníferas.

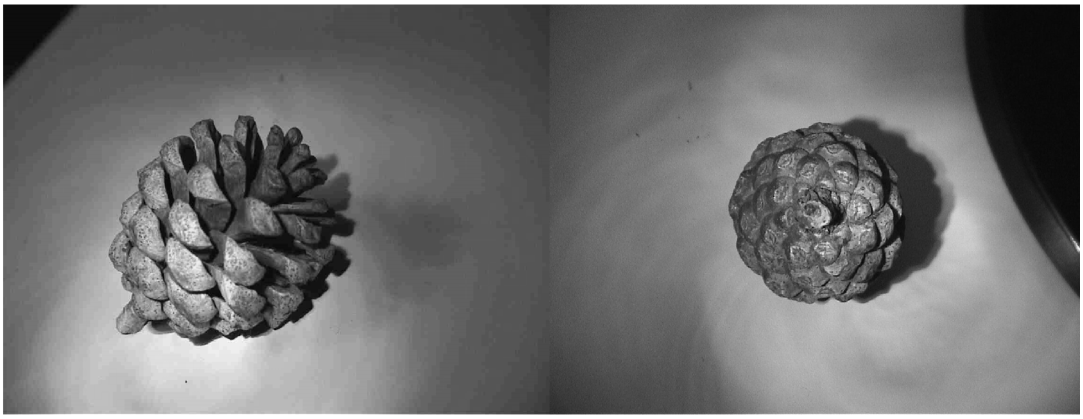


Ilustración: Piña de pino.

Ilustración: Espirales horarios.

Ilustración: Espirales antihorarios.

Cinco espirales en sentido horario y ocho en sentido antihorario. Nuevamente dos números consecutivos de la famosa serie. Y como hemos visto anteriormente, el cociente de estos dos números tiende hacia el número de oro; podríamos decir que estas piñas esconden oro entre sus escamas.

Igual ocurre con las semillas de plantas como el girasol. Observadlo en las imágenes inferiores. En dos fotografías del mismo girasol se han señalado cada uno de los espirales en uno y otro sentido, a la izquierda los que se cuentan en sentido horario, 21, y a la derecha los que se cuentan en sentido antihorario, 34.

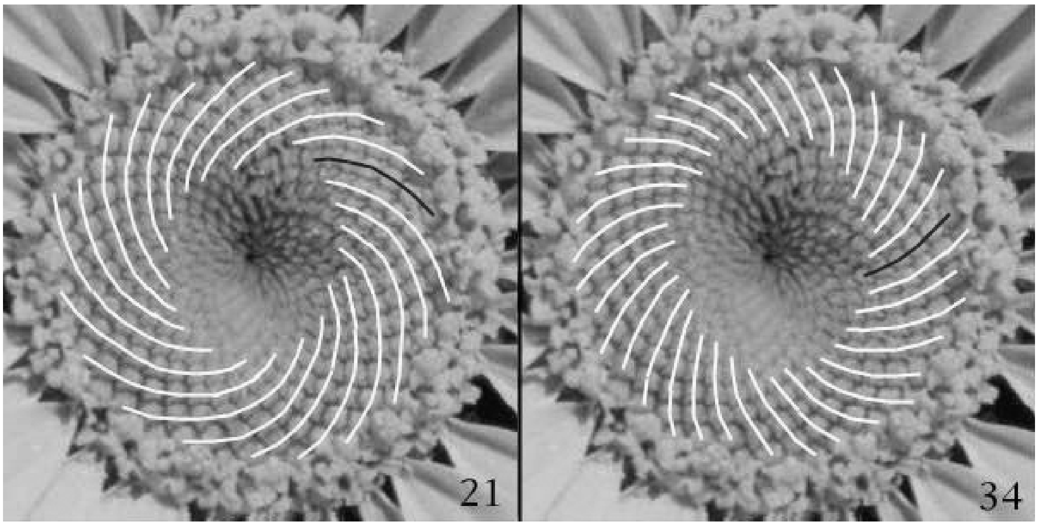


Ilustración: Espirales de un girasol.

Y finalmente otra curiosidad. La phyllotaxis es la posición de las yemas de los tallos de las plantas a lo largo del mismo. En algunas de ellas están cada 137'5 grados, es decir, que de una yema a la siguiente se produce un giro de 137'5 grados, o lo que es lo mismo:

$$360 \cdot \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) = 137'5$$

Como podemos ver el número de oro y la serie de Fibonacci siguen íntimamente relacionadas.

Hasta aquí el mundo vegetal, pero en el animal también podemos encontrar ejemplos de esta presencia. Sólo como muestra pensemos en las estrellas de mar, con sus cinco brazos en disposición pentagonal.

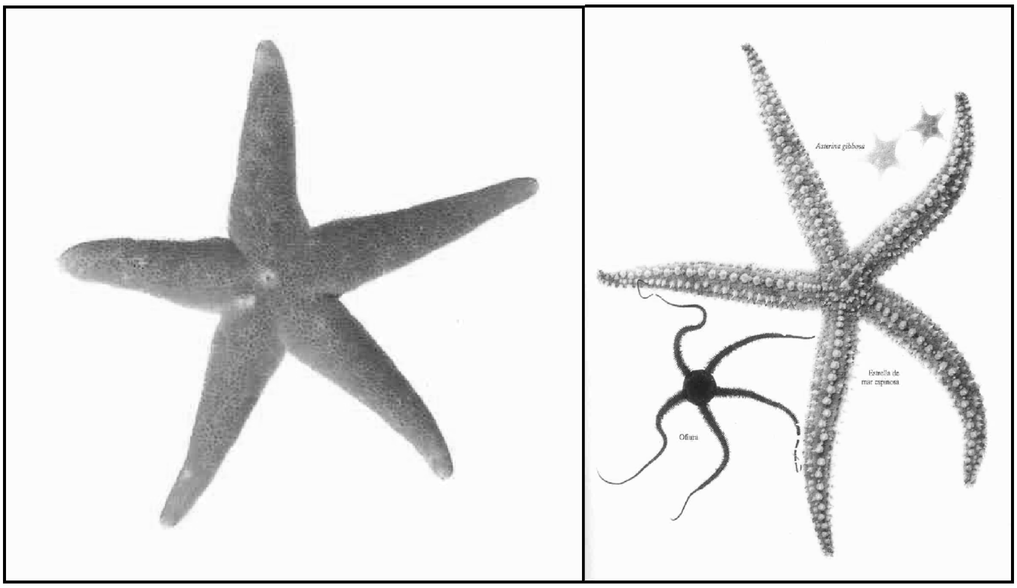


Ilustración: Estrellas de mar.

Sin salir del mar podemos encontrar más ejemplos, como las estrías principales de las conchas de algunos moluscos. En la siguiente imagen tenemos la concha de una venera, un molusco marino. Están marcadas las trece estrías principales.

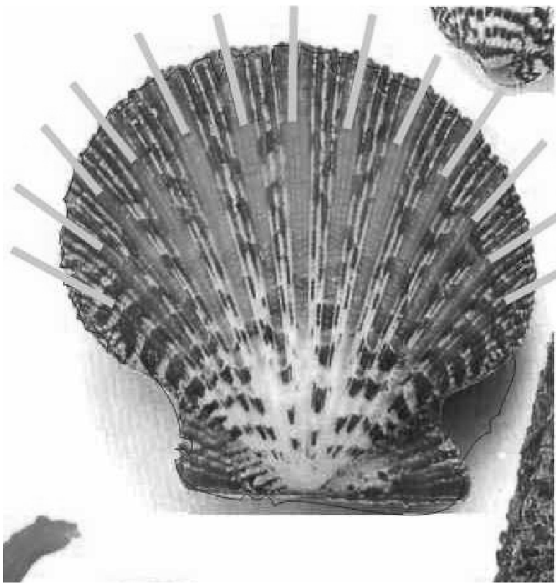


Ilustración: Concha de venera.

Prácticamente en cualquier playa podemos encontrar multitud de conchas abandonadas en la orilla por el oleaje. Si nos fijamos en ellas veremos que, de entre todas las clases que podemos encontrar, aquellas que tienen las estrías más marcadas tienen un número de estrías que coincide con un número de la serie de Fibonacci.

Capitulo IV

Matemáticas y sociedad: algunas notas y consideraciones

"*Los científicos se esfuerzan en hacer posible aquello que, quizás, es imposible. Los políticos, a hacer que aquello que es posible realizar sea imposible*"

B. Rusell

Las matemáticas, un hecho social

A lo largo del libro he puesto énfasis en aspectos en los que las matemáticas y la enseñanza tradicional son insatisfactorias y poco amenas, proponiendo situaciones de su influencia en la vida cotidiana. Los ejemplos presentados muestran que la educación matemática tendría que ser más amplia. Tendría que ser una auténtica educación en humanidades en la cual los estudiantes no se limitaran a aprender los contenidos específicos de cada materia, sino también qué papel representan las matemáticas en nuestra cultura y en la sociedad. A modo de ilustración citaremos unas palabras de H. Pollack - citadas en Claudi Alsina (1996) en *Apología de la utilidad y el realismo* -.
"*Tradicionalmente, las matemáticas de la vida normal de cada día han sido las de la escuela primaria. Las matemáticas para ejercer una ciudadanía inteligente deben de ser básicamente la educación secundaria. Las matemáticas de la vida profesional han de ser las enseñadas en la etapa universitaria - si el ejercicio de la profesión lo requiere -. Las matemáticas, como parte de la cultura integral humana, no han de estar asignadas a ningún nivel educativo*"

Las matemáticas han permitido a pintores pintar de forma realista y no sólo han hecho posible la comprensión de sonidos musicales, sino que el análisis de estos sonidos es imprescindible para la construcción de teléfonos, la radio y otros aparatos de grabación y reproducción de sonidos. Las matemáticas aparecen en investigaciones de biología, medicina, economía, etc. y son imprescindibles en la sociedad actual.
El conocimiento es un "todo" y las matemáticas son un subconjunto de este "todo". Enseñar matemáticas como si estuviesen aisladas es una distorsión del conocimiento. Cada materia representa una aproximación al conocimiento y cualquier aportación

pedagógicamente útil ha de ser bienvenida. De esta manera enseñaríamos matemáticas más allá de las propias matemáticas: es decir las relaciones con otros estadios - intereses sociales y humanos – y realizaríamos una apuesta por un curriculum matemático que buscaría la unión con las corrientes principales del pensamiento humano y tecnológico. Algunas de estas relaciones proporcionarían motivación, otras serían aplicaciones y otras simplemente motivo de debate.

Las matemáticas no son un conjunto de conocimientos aislados, sino que responden a finalidades y propósitos determinados. Es preciso que como profesionales de la enseñanza mostremos su utilidad con independencia del ámbito meramente matemático.

Es deseable que los estudiantes y los ciudadanos - que son los usuarios de las matemáticas - aprendan de qué manera las matemáticas pueden tener influencia en el uso cotidiano y profesional. De hecho, si nosotros les mostramos cómo las matemáticas les pueden ser de utilidad en la sociedad, los estudiantes obtendrán mayor motivación y este hecho repercutirá en beneficio de su carrera.

Históricamente, la motivación natural es el estudio de problemas reales - mayoritariamente físicos -. Newton estudió el movimiento de la luna para ayudar a los marineros a determinar su posición en el mar. Euler estudió el diseño de barcos para confeccionar mapas de navegación. Descartes diseñó lentes para mejorar el telescopio y el microscopio. Gauss trabajó para perfeccionar el telégrafo eléctrico y la medida del magnetismo. ¡¡¡Las matemáticas son un medio para un fin!!! Se usan los conceptos y razonamientos para conseguir resultados relativos a situaciones reales.

Los ciudadanos y, en particular, los estudiantes, viven en un mundo real - caracterizado por la vida cotidiana - y es seguro que sienten más atracción por fenómenos cotidianos del día a día que por la abstracción propia del matemático de oficio. Recordemos la bella cita de Plutarco - citada en Morris Kline (1986)- "*... la mente no es un vaso que se debe llenar, sino un fuego que es preciso encender...*".

Los números negativos no son simplemente los inversos de los positivos respecto a la suma, son también los grados que marca un termómetro bajo cero; la elipse no es simplemente un lugar geométrico sino que es también la trayectoria de un planeta o cometa. Las funciones son algo más que pares ordenados, son también relaciones entre las leyes del universo y de la sociedad. En síntesis, los conceptos matemáticos son fruto de fenómenos reales. Esconder los conceptos de su significado es como conservar la espina de un pescado y despreciar su carne!

La sociedad cada vez se encuentra más formalizada y matematizada como consecuencia de los cambios económicos y tecnológicos a gran escala. Este avance nos exige un mayor grado de profesionalidad. Las matemáticas tienen un papel relevante en la sociedad y su desarrollo. Podríamos afirmar que las matemáticas son la fuerza motriz del desarrollo y los cambios tecnológicos y sociales.

Es preciso preparar a los estudiantes de hoy para que sean ciudadanos del futuro, que tengan criterios y aptitudes para un aprendizaje continuado. No podemos caer en el error de creer que la formación acaba cuando los estudiantes finalizan la carrera. Los conocimientos técnicos adquiridos hace 20 años ya no son válidos; la dinámica social y laboral provoca un constante reciclaje. Los estudiantes de hace 20 años estudiaban el comportamiento de la máquina de vapor y hoy en día estudian el comportamiento de las máquinas diesel. En el discurso educativo es preciso que los educadores tomemos posturas sólidas haciendo una apuesta firme por las nuevas tecnologías.

Considero justo justificar la presencia de las matemáticas en la educación. Es evidente que si no existiese justificación alguna estarían suprimidas. ¡Además no es precisamente la asignatura más bien recibida por los alumnos! Podemos apuntar algunos argumentos:

1. El papel de las matemáticas en el desarrollo técnico actual.
2. Las matemáticas forman parte del rol cultural de la sociedad y de la vida cotidiana.
3. Las matemáticas pueden ofrecer contenidos de interés curriculares a nivel formativo e informativo.
4. Las matemáticas enriquecen la creatividad y el sentido crítico.

Los argumentos anteriores están avalados por diversos autores: Claudi Alsina (1996), John Perry (1901) Morris Kline (1986)... En este sentido citaré algunas contribuciones al respecto.

En 1919, la Mathematical Association señalaba: "*...la enseñanza que ofrecemos a un alumno lo tendría que preparar para ser un ciudadano en el sentido más amplio de la palabra. Su educación ha de capacitarlo no solamente para aplicar las matemáticas en asuntos prácticos, sino también para entender aquellos grandes problemas del mundo, la solución de los cuales depende de las matemáticas y de la ciencia...*".

Zoltan Dienes (1978) afirma: "*...la meta principal de las matemáticas ha de ser el desarrollo de ciertas pautas del pensamiento, de ciertas estrategias, que la gente pueda desarrollar al enfrentarse a situaciones nuevas con las que anteriormente no se había encontrado...*".

Notemos que en las citas anteriores encontramos razones utilitarias de las matemáticas y su enseñanza, indicaciones y necesidades profesionales, desarrollo de capacidades formativas y desarrollo de la personalidad y aptitudes.

Sería injusto no citar a Mogen Niss, ex secretario del Comité Internacional de Educación Matemática (ICME) que en 1992 afirma: "*...hemos de realizar una reconstrucción analítica de la función de las matemáticas en el mundo - es decir: la naturaleza, la sociedad y la cultura - y se ha de tener en consideración que este papel es variable según la época y lugar...*". Niss expresa algebraicamente la enseñanza de las matemáticas del siguiente modo:

"*La enseñanza de las matemáticas es la función de las matemáticas en la sociedad, de las matemáticas en la cultura, de las matemáticas en la política y la economía, del individuo y de sus valores culturales y ideológicos*".

En consecuencia, la enseñanza de las matemáticas ha de contribuir a fomentar la ciudadanía inteligente e inquieta en todos los miembros de la sociedad. Concretando más, la enseñanza de las matemáticas tiene que darse en cualquier lugar con el fin de crear una perspectiva del todo en general, es decir, de las fuerzas esenciales que existen, codo a codo en el desarrollo de la naturaleza, de la sociedad y de la vida de los seres humanos.

INNOVACIÓN Y NUEVAS TECNOLOGÍAS

" *Plantear preguntas nuevas, posibilidades nuevas y observar los problemas desde un nuevo ángulo requiere imaginación creativa y es señal de un auténtico progreso*"

A. Einstein (1938)

Los amplios efectos de la tecnología y el rápido desarrollo de las distintas áreas de conocimiento obligan a realizar una constante revisión de los curriculums académicos para comprobar la coherencia interna, la eficacia en su aplicación y los resultados.
Las matemáticas y los aspectos didácticos y pedagógicos forman parte de la base en la que se apoya la administración académica de su diseño curricular. Es relevante, dentro de esta revisión, el estudio de un modelo de enseñanza para la enseñanza de las matemáticas, en el que se incorporen las nuevas tendencias de la educación matemática, disciplina que tiene, entre otros objetivos, conseguir insertar la ciencia matemática en la sociedad como una herramienta intelectual que forme parte del hábito cultural de los ciudadanos. En el caso de la enseñanza obligatoria y posterior, representa un papel fundamental, ya que la educación matemática añadiría al perfil académico una vertiente crítica, innovadora y creativa que contribuiría a conseguir un óptimo perfil profesional.
La adquisición de conocimientos nace de la hipótesis de que el cerebro no es un consumidor masivo de conocimientos, sino que los construye con un proceso que incluye la selección, la interpretación y la realización de inferencias.

Sobre las nuevas tecnologías, afirmo que hoy en día aparecen en un amplio abanico de actividades cotidianas. El ordenador ha pasado a ser una herramienta imprescindible en la mesa de cualquier despacho, en las consultas de un médico y de un abogado, en las cajas de los supermercados, etc. Los medios audiovisuales son testigos de la intimidad de muchas familias como un miembro más: televisión, vídeo, Internet.
La educación no puede ser una excepción y por tanto no debe estar al margen de la utilización de estos medios. Una de las misiones de la educación ha de ser capacitar a los ciudadanos para comprender la cultura del mundo actual. En este sentido, las nuevas tecnologías han de ser unas herramientas que colaboren y sean cómplices en conseguir

nuevas metas de calidad y, ante todo, han de provocar que, en el proceso de enseñanza, se usen, en la medida que sea posible, métodos próximos al entorno profesional y que supongan por tanto una aproximación a la realidad. Por consiguiente, es preciso considerar que para la enseñanza no disponemos sólo de los libros y la pizarra tradicional, sino que también disponemos - en mayor o menor grado - de otras herramientas válidas y necesarias para la mejoría de la calidad docente: retroproyector, vídeos, ordenadores, audio.

El uso de medios audiovisuales y informáticos en el aula requiere una predisposición por parte del profesor. A menudo, el desconocimiento, la falta de medios y la falta de formación hace difícil la implantación de nuevas tecnologías.

Está claro que el simple uso de una *trasparencia* en un momento dado ya representa un pequeño cambio metodológico respecto al trinomio libro-pizarra-profesor. Una transparencia permite presentar a los estudiantes-interlocutores resúmenes de los puntos más destacados del tema, mostrar esquemas y tablas con más claridad, calidad y nitidez en relación con la tiza tradicional. *Los medios audiovisuales* favorecen la presentación de imágenes, animadas o no, de los temas tratados, ayudan a identificar los temas con la realidad estimulando el conocimiento a través de la imagen, hacen aumentar la calidad de los dibujos y representaciones con relación a lo que podemos conseguir con dibujando en la pizarra o en el papel. Y si combinamos imagen y sonido, propiciaremos una mayor atención por parte del alumnado. Los vídeos y los recientes DVD pueden cumplir una misión introductoria en la motivación de los temas y a su vez desarrollar conceptos. Con todo lo expuesto tenemos que tener claro las limitaciones y actuar con prudencia; es preciso tener claro que las nuevas tecnologías no han de ser un medio de cosmética: no se trata de hacer lo que se ha hecho siempre pero, en vez de hacerlo como siempre, pasar un vídeo donde se refleje lo que se hacia en la pizarra con tiza. Un temario obsoleto continua siéndolo y estando fuera de lugar tanto si se desarrolla en la tradicional pizarra como si se presenta disfrazado de vídeo.

Los *medios informáticos* y, concretamente, el ordenador, proporcionan una forma cómoda y rápida de acceso y representación de la información. El ordenador permite al alumno dedicar más tiempo a la comprensión y análisis de los resultados que las formas mecánica y manual. Además los posibles errores de cálculo se minimizan. El ordenador proporciona la posibilidad de experimentar con datos reales, hecho que es difícil y complicado manualmente. Ya no es válido el argumento - usual en diversos estadios educativos - "*... ¿cómo podemos explicar este tema con menos horas?...*", es preciso reorientar la enseñanza de las matemáticas poniendo más hincapié en la intuición, la modelización y las nuevas tecnologías y no entretenernos tanto en los procesos deductivos formales. Asimismo, es necesario huir de la abstracción propia de las matemáticas para matemáticos.

Considero que el uso de las nuevas tecnologías favorece el trabajo en grupo, proporciona el debate y la discusión entre los estudiantes - aspecto que indudablemente enriquece el aprendizaje -, propicia la adquisición de habilidades de trabajo cooperativo, y ayuda a realizar informes escritos de las actividades visualizadas en ordenador o vídeo, etc.

Recomendaciones para la mejora de la calidad docente

1. *El uso de los ordenadores*

1.1 Hace posible resolver problemas complejos y utilizar datos reales desde los primeros años de escolaridad.

1.2 Posibilita superar tareas rutinarias en beneficio de una atención más profunda en los procesos de resolución de problemas y en los aspectos más conceptuales de las aplicaciones.

1.3 Algunos problemas inaccesibles desde un punto de vista teórico, por su complejidad o por la exigencia de conocimientos matemáticos, pueden ser estudiados a través de simulación numérica o gráfica con la ayuda del ordenador. Este hecho es posible gracias a la existencia de programas informáticos que se encuentran al alcance de los estudiantes, los más populares son *Mathematica, Derive, Matlab y Maple*. Además en el mercado actual podemos encontrar calculadoras que efectúan cálculo simbólico y que pueden servir de complemento en el aula; entre ellas destaca la TI92 de Texas Instruments, que lleva incorporado el *Cabri geometre* y una versión adaptada del *Derive*. El uso de estas herramientas permite realizar cálculos que hasta hace poco tiempo requerían mucho tiempo y en los que no siempre era posible trabajar con datos reales. Estos aspectos comportan un cambio en los contenidos metodológicos, favoreciendo la substitución de algoritmos obsoletos, para poner especial hincapié en el significado de los conceptos y sus aplicaciones inmediatas.

2. *A nivel de contenidos*

Es preciso revisar los contenidos. Los temarios de matemáticas impartidos en las escuelas son prácticamente los mismos a pesar de tratarse de orientaciones curriculares distintas (economía, biología etc.) Algunos de ellos han quedado desfasados respecto a las necesidades de la vida cotidiana y del futuro profesional. Los libros de texto para usuarios de las matemáticas han de diferir de los libros de matemáticas para "matemáticos de oficio". No sólo hay que redefinir contenidos sino también las metodologías.

3. *A nivel metodológico*

   3.1. Repercusión de las matemáticas en el futuro profesional del estudiante: incluir prácticas de modelización como un proceso heurístico de construcción de conocimientos con el objetivo de formar a profesionales con competencia crítica. El profesor presenta una situación del mundo real incentivando a los alumnos a construir un modelo matemático de la situación. Este hecho puede motivar la aparición de diferentes modelos.

   3.2. Es necesario potenciar el trabajo el grupo. En la vida profesional, los ciudadanos trabajan en colaboración con otros colegas compartiendo experiencias y avanzando en el desarrollo de proyectos. Hemos de huir del individualismo y en consecuencia pensar en nuevas maneras de evaluar. En una sociedad donde cada vez se valora más el trabajo en grupo y el uso de las nuevas tecnologías, nos encontramos - en contraposición con las demandas sociales - que en las escuelas se exige todavía la realización de exámenes de matemáticas sin calculadoras, apuntes, consultas o debate con los compañeros. Una recomendación sobre la forma de evaluar consistiría en defender públicamente un proyecto realizado en grupo de manera que los compañeros de aula participen en un debate fruto de la exposición. Es preciso evaluar lo que los alumnos saben, no lo que no saben!!!.

   3.3. Es preciso potenciar el *taller de matemáticas* que contemple prácticas con vídeos, audio y ordenadores conectados a Internet.

4. *La actitud del profesor*

   4.1. Es preciso insistir en el aumento de la conciencia sobre la importancia social del trabajo del educador matemático. El papel del profesor no ha de ser el de un simple orador y calificador, sino que su labor ha de consistir fundamentalmente en orientar actividades.

   4.2. Hemos de ser los primeros en exigir el máximo de calidad y el máximo de seriedad científica en nuestro trabajo.

4.3. Es preciso reorientar la formación inicial y la formación permanente del educador matemático, buscando el equilibrio entre el componente matemático y el psicopedagógico.

4.4. Es preciso insistir en el trabajo cooperativo. La dimensión educativa es una dimensión social y es preciso que se practique socialmente, desde los grupos de trabajo, los seminarios, los departamentos, promoviendo acciones conjuntas y contribuyendo a crear un estado de opinión sobre los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Sería injusto no mencionar la figura de Pedro Puig Adam.

Puig Adam dedicó toda su vida a la docencia y a la didáctica de las matemáticas. La renovación pedagógica que representavan sus ideas y iniciativas han tenido una gran repercusión a nivel internacional. Desearía que sus sabios consejos - plasmados en el decálogo de la didáctica de las matemáticas- quedasen reflejados en el presente texto; los cuales no han perdido actualidad y que forman parte del debate y la reflexión educativa.

Veamos una cita de Don Pedro Puig Adam bastante significativa:

«La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces». (Puig Adam, 1958) .

Seguidamente les detallo su herencia educativa:

1) No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
2) No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
3) Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
4) Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
5) Enseñar, guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
6) Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objetivo del conocimiento.
7) Promover en todo lo posible la autocorrección.
8) Conseguir cierta maestría en las soluciones, antes de automatizarlas.
9) Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.

10) Procurar que en todo momento el alumno obtenga éxitos que eviten su desaliento.

Epílogo

El objetivo que pretendía al escribir el presente libro era ofrecer una visión diferente de las matemáticas y de su enseñanza, de forma que la palabra “matemáticas” no provoque entre los ciudadanos temor y ganas de salir corriendo. Podríamos caracterizarla en los siguiente puntos:

1. *Formativo*:
   Estimular el interés por del descubrimiento y la creatividad y adquirir confianza en las capacidades y recursos de los sujetos.
2. *De competencia critica*:
   En una sociedad cada vez más influida por las matemáticas, a través de sus aplicaciones y sus modelos, es preciso desarrollar una competencia crítica entre los alumnos que les permita realizar una integración en el mundo laboral y social más activa y participativa. La competencia crítica debe entenderse como una capacidad de reconocer, comprender, analizar y validar el uso de las matemáticas en un contexto real.
3. *Utilitarios*:
   La capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos que hemos adquirido en situaciones del mundo social no proviene de una formación abstracta. Según muestra la experiencia, tiene relación con una educación previa más práctica. Para conseguir este objetivo es preciso realizar experiencias de prácticas de modelización - dentro de diversos contextos - en la enseñanza que se ofrece a los alumnos, con el fin de que adquieran instrumentos válidos y útiles en el futuro profesional.
4. *Visión de las matemáticas*:
   Es preciso presentar las matemáticas como una herramienta ligada a otras ramas de la ciencia y como una actividad cultural y social - visión integradora de las matemáticas -.

5. *Argumento psicológico*:

   La incorporación de aplicaciones matemáticas en los curriculums puede conseguir que los conceptos matemáticos adquieran un protagonismo a nivel mental para los estudiantes. De esta forma, la capacidad de usar un concepto matemático engloba algo más que conocimientos simples de este concepto. Saber realizar un cálculo no es garantía de que se sepa decidir en qué situaciones es necesario realizarlo o simplemente el estudiante no sabe decidir de qué manera usar un resultado cuando éste ha sido adquirido previamente. Es preciso analizar si el estudiante es un mero espectador de procedimientos, memorizando técnicas mecánicas puramente o bien si el alumno entiende lo que está realizando, comprende los conceptos, su interpretación, y observa realmente su utilidad.

   La eficacia de las matemáticas y su presencia constante en la sociedad moderna lleva a sugerir la utilización del pensamiento matemático para modelar situaciones practicas.

   A partir de este punto considero que pueden enumerarse más puntos análogos a los anteriores, aspectos que el lector puede completar.

   Con los aspectos y ejemplos mostrados en el presente texto, pretendo ofrecer una visión distinta de las matemáticas que espero que sea provechosa.

   En el fondo, la solución óptima consiste en aprovechar a los educadores y personas que están inactivas - quizás por imperativo legal - y que tienen una larga trayectoria docente en la enseñanza. Ellos, conjuntamente con las nuevas tecnologías, pueden conseguir que los niños y niñas de hoy sean ciudadanos del mañana y que a su vez estén preparados para hacer frente a los retos que nos plantea el siglo XXI. En última instancia, nosotros modelamos los profesionales del futuro y el oficio de educar representa un papel muy noble e importante.

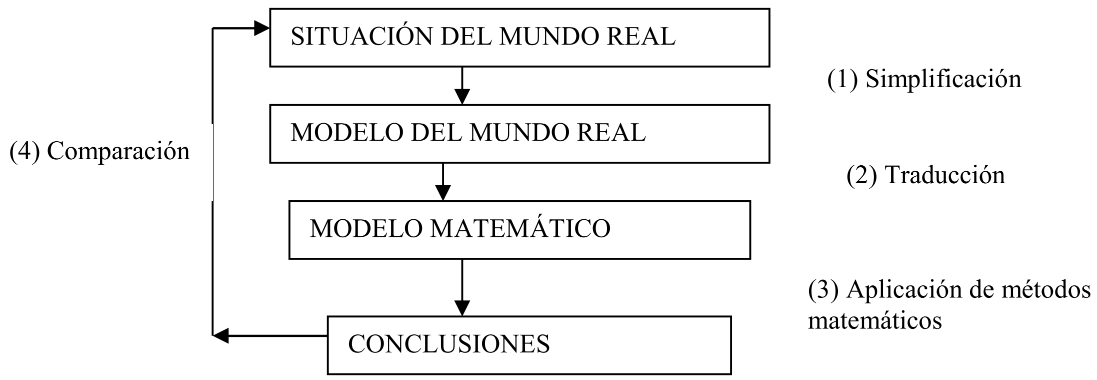
Una propuesta metodológica

Personalmente considero que todo ensayo de la educación matemática debe incluir una propuesta metodológica. Por este motivo se ha considerado oportuno ofrecer una vía metodológica a modo de aportación - no necesariamente compartida por la población de educadores - que considero eficiente y que ha su vez ha sido experimentada en la Universidad Politécnica de Catalunya, entre otros centros educativos.

La propuesta metodológica de presentación de los contenidos matemáticos en las aulas está basada - tal como apunto en la introducción - en el que se denomina *modelización matemática como herramienta de enseñanza-aprendizaje*. La modelización matemática consiste – brevemente - en formular un problema de la vida cotidiana en términos matemáticos - lo que denomino modelo -, resolverlo si es posible e interpretar los resultados en términos del problema y de la situación planteada.

Para ilustrar qué es el proceso de modelización como propuesta metodológica, adjunto el siguiente organigrama:

ESQUEMA DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN



La propuesta metodológica está centrada en los siguientes puntos:

1. Presentación de una situación simplificada del mundo real.
2. Traducción de la situación en terminología matemática y obtención del modelo.
3. Trabajar sobre el modelo y resolución del problema.
4. Presentación de la solución en términos no matemáticos.

La propuesta está focalizada, por tanto, en la innovación docente y en su viabilidad. La nueva vía estudiada es lo que llamamos modelización matemática. La viabilidad de la metodología la podemos encontrar desarrollada en la obra "*Una proposta per a un nou ensenyment de les matemàtiques*" (Joan Gómez, 1999) en la cual podemos encontrar experiencias recientes que avalan la metodología y a su vez muestra resultados contrastados de calidad.

En la obra he incluido situaciones y reflexiones que muestran la cara humana y divertida de las matemáticas, desde un punto de vista distinto del tradicional y a su vez se hace notar la presencia de las matemáticas en situaciones cotidianas. Este hecho comporta una aportación de recursos que podrían ser incluidos en su enseñanza.
Todo este intento de cambio es consecuencia natural de la velocidad de la evolución de la tecnología y de las formas de vida. Es preciso preparar a nuestros estudiantes para el mundo de hoy y de mañana; esto nos obliga a pensar en cuál es la manera más eficaz del proceso de enseñanza / aprendizaje.
De hecho, el modelaje matemático es cada vez más útil. La importancia de las matemáticas radica en su aplicación a problemas específicos o particulares. La importancia creciente de la enseñanza de las matemáticas en la sociedad y en la cultura se refleja en la resolución de problemas matemáticos que provienen del mundo cotidiano y profesional. Mogen Niss (1991) define el modelaje como "*el arte de aplicar las matemáticas a la vida real*".
De hecho podría caracterizar - desde mi punto de vista particular - el modelaje matemático como "*una herramienta innovadora de enseñanza eficiente y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos y hermana matemática y realidad*".
En estos momentos considero que el lector ya podrá responder a la pregunta formulada por Albert Einstein (1938):

" *¿Cómo podemos explicar que las matemáticas, un producto de la mente humana independiente de la experiencia, encajen tan bien en los objetos y elementos de la realidad?* ".

Para terminar, y a modo de reflexión dirigida a toda la comunidad educativa, independientemente de la materia en que impartan docencia, desearía plasmar unas bellas y emotivas palabras extraídas del texto "*Para un profesor muy especial*" de Pam Brown. En ellas se refleja el impacto que la educación tendría que tener en nuestros alumnos y son un buen ejemplo de lo que nos gustaría que ellos nos dijesen a nosotros.

"*Gracias por conseguir que aprender no sea una tarea sino un placer. Gracias, maestro, de ser alguien en quién poder confiar y a quién poder recorrer en momentos difíciles. Nunca nos proporcionas la impresión de limitarte a llenar la pizarra de datos inútiles. Nos acompañas en nuestros viajes de descubrimiento. Nos has enseñado a disfrutar de aventuras de la mente, a buscar, a descubrir y a vivir sorpresas. Un maestro tiene presente la sensibilidad de las cosas simples y cotidianas, las que un niño conoce y vive, y las transforma en escaleras para conseguir el saber. Gracias por no ser sarcástico, hecho que siempre desilusiona y confunde al alumno. Sea cual sea el caos exterior, sabemos que en tu aula encontraremos orden, tolerancia y sonrisas y estímulos. Maestro, has puesto la belleza en mis manos. Tú, como maestro, me has proporcionado palabras, imágenes, ideas para construir la vida y conocer el mundo cotidiano...*".

Joan Gómez i Urgellés

Vilanova i la Geltrú, 23 de diciembre del 2017

Bibliografia

1. Abrantes, Paulo (1989). "Matemática, realidade e trabalho de projecto na escola secundária". Lisboa. Educaçao e Matemática 12.
2. Alsina, Claudi (1995). "Una matemática feliz". Ed. Red Olímpica. Buenos Aires.
3. Alsina, Claudi (1996)."Apología de la utilidad y el realismo". Matemáticas en escuelas técnicas. S. Romero i d'altres. Serie Collectanea núm. 4. 1996. Huelva. Publicacions de la Universitat de Huelva.
4. Alsina, Claudi (1999). "Contar bien para vivir mejor". Edit. Rubes.
5. Bishop, A. & Goffree, F. (1986). "Perspectives on Mathematics Education". Dordrecht, Holanda: D.Reidel.
6. Blum, W. & Niss, M. (1991)."Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction" Educational Studes in Mathematics, vol. 22, núm. 1, pàg 37-68.
7. Brown, P. (1996). "Para un profesor muy especial". Ed. Edaf. Madrid..
8. Burgués, C. i d'altres (1995). "Ensenyar matemàtiques". Ed. Graó.
9. Davis, Philip (1989). "Experiencia matemática".Barcelona. Ed. Labor.
10. Diversos (1998). "Educación matemática e Internet". Revista UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, núm. 15. Edit. Graó.
11. Fernández, V. "Hollywood se burla de la ciencia". Muy Interesante núm. 216.
12. Fischbein, E. (1987). "Intuition in Science and mathematics: An Educational Approach ". Reidel, Dordrecht, pàgs.121-75.
13. Fortuny, J.Ma. Alsina, Claudi (1992). "La matemàtica del consumidor". Institut Català del Consum. Generalitat de Catalunya.
14. Freudenthal, H. (1967). "Las matemáticas en la vida cotidiana". Madrid. Ediciones Guadarrama.
15. Gadner,M. (1980)."Circo matemático". Alianza Editorial.
16. Gómez, Joan (1997). Experiències de millora de la qualitat docent a la UPC. Publicacions UPC. Barcelona.
17. Gómez, Joan (1998). Tesi doctoral. UAB.
18. Gómez, Joan (1999). "Una proposta per a un nou ensenyament de les matemàtiques". Edicions CEAC.
19. Gómez, Joan (2000). "L'altre cara de les matemàtiques". Edit. Cep i la Nansa.
20. Griffiths,H. Howson, G. (1973). "Mathematics: society and curricula". Cambridge University. London.
21. Jiménez, Douglas (2001). "La aventura matemática". El ncional. Venezuela.
22. Kilpratick,W.H. (1918). "The project method". Teachers College Record. Vol. XIX, núm. 4.
23. Kline, M. (1986). "El fracaso de la matemática moderna". Madrid. Siglo XXI editores.
24. Lesh, R. (1981). "Applied Mathematical Problem Solving". Educational Studies in Mathematics, núm. 12, vol. 2, pàgs. 235-264.

25. Matila, G (1983) ."Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes".Edit. Poseidón.

26. Moreno, M. (1992). "Física i ciència-ficció". Edicions UPC.
27. Niss, M. (1996). "¿Por qué enseñamos matemáticas en las escuelas?". Dinamarca. Revista Investigación y didáctica de las matemáticas. MEC, pàgs. 19-30.
28. Ortega y Gasset, J. (1930). "Missió de la Universitat". Obras completas. Vol. 4. Alianza Editorial-Revista Occidente. Madrid.
29. Polya, G. (1966). "Matemáticas y razonamiento plausible".Tecnos. Madrid.
30. Polya, G. (1994)."Métodos matemáticos de la ciencia". Madrid. Euler Editorial.
31. Puig Adam, P. (1958)."Ecuaciones diferenciales". Nuevas gráficas, S.A.
32. Ríos, Sixto (1995). "Modelización". Alianza Editorial.
33. Santaló (1985). "Educació matemàtica, avui". Barcelona. Editorial Teide.
34. Skovsmose, Ole. (1997). "Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas". Revista EMA. Vol. 2, núm. 3, pàgs. 191-216.
35. Trillas, E. (1990) "Lecciones de álgebra y geometria".Edit. Gustavo Gili

36. Valero, P. (1994). "La educación matemàtica y la construcción de la democracia". Una empresa docente. Butlletí Club EMA. núm. 6, agost del 1994.